Einige BRDF Modelle

Nikolaus Gebhardt*

Zusammenfassung

Bidirektionale Reflektionsverteilungsfunktionen (*BRDFs, bidirectional reflection distribution functions*) sind eine Klasse von Funktionen zur Beschreibung der Reflektionseigenschaften von Materialien, die vor allem Anwendung in der Computergrafik findet. In dieser Seminararbeit wird die Funktionsweise von BRDFs kurz beschrieben, und anschließend wird auf einige spezielle Modelle eingegangen.

Keywords: BRDF Modelle, Computergrafik

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen **1**
1.1 Radiometrische Größen 1
1.1.1 Raumwinkel 2
1.1.2 Leuchtdichte (Radiance) 2
1.1.3 Bestrahlungsstärke (Irradiance) 2
1.2 Die BRDF 3
1.3 Eigenschaften von BRDFs 3
1.4 Klassen von BRDFs 4
1.5 Komponenten 4

2 Modelle **4**
2.1 Lambert 5
2.2 Phong 6
2.2.1 Blinn Phong 6
2.3 Cook-Torrance 7
2.4 He 10
2.5 Ward 12
2.6 Schlick 14
2.7 Lafortune 18

3 Fazit **19**

1 Grundlagen

In der Natur interagieren verschiedene Materialien unter gleichen Beleuchtungsverhältnissen unterschiedlich mit dem auf sie eintreffenden Licht. Sie zerstreuen die auf sie eintreffende Strahlung auf verschiedene Art. Dabei erscheinen manche Oberflächen diffus, andere zum Beispiel als Spiegel. Dieses unterschiedliche Reflektionsverhalten von Materialien kann durch eine bidirektionale Reflektionsverteilungsfunktion beschrieben werden, die als BRDF (bidirectional reflection distribution function) 1977 amtlich vom National Bureau of Standards (USA) definiert wurde um Reflektionsdarstellungen und -berechnungen zu vereinheitlichen [Wei02]. Es handelt sich hierbei um eine vierdimensionale Funktion für eine gegebene Wellenlänge, die zurückliefert, wieviel Licht von einer Oberfläche reflektiert wird und die wie in [Wat00] aufgeschrieben werden kann:

$$BRDF = f(\theta_{in}, \phi_{in}, \theta_{ref}, \phi_{ref}) = f(\mathbf{L}, \mathbf{V}) \qquad (1)$$

Die vier Variablen θ_{in}, ϕ_{in}, θ_{ref}, und ϕ_{ref} beschreiben die Azimut- und Deklinationswinkel von Lichteinfalls- und Reflektionsrichtung. Um dies zu verkürzen bezeichnen hier **L** die Richtung zum Licht und **V** Richtung des Beobachters auf die Oberfläche. Die aus [May00] adaptierte Abbildung 1 veranschaulicht diese Eingabevariablen.

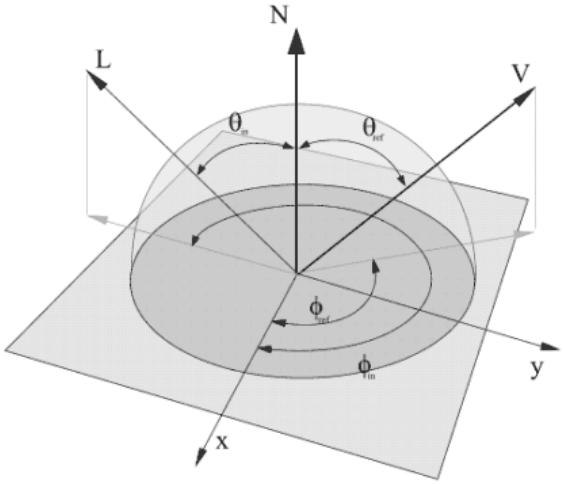

Abbildung 1: Die Eingabevariablen θ_{in}, ϕ_{in}, θ_{ref}, und ϕ_{ref} der bidirektionalen Reflektionsverteilungsfunktion.

1.1 Radiometrische Größen

Um genauer auf die Funktionsweise der bidirektionalen Reflektionsverteilungsfunktion eingehen zu

*niko@code3d.com

können, sollen hier noch kurz einige immer wieder verwendete Größen und Bezeichnungen erklärt werden:

1.1.1 Raumwinkel

Analog zum Bogenwinkel in der Ebene wird der Raumwinkel ω im Raum definiert. Er beschreibt das Verhältnis einer Kugelfläche A zum Quadrat des Radius dieser Kugel:

$$\omega = \frac{A}{r^2}[sr]. \tag{2}$$

Seine Einheit wird in sr = steradiant angegeben. Der volle Raumwinkel ist die Fläche der Einheitskugel und hat also die Größe $4\pi sr$.

Weil es nicht wirklich Sinn macht, anzugeben, wieviel Licht von einer genauen Richtung kommt, da es als eine Art Fluss durch Raum gemessen wird, (zum Beispiel $\frac{Watt}{m^2}$), verwendet man den **differentialen Raumwinkel** oder *differential solid angle*, der angibt, wieviel Licht aus einer kleinen Menge von Richtungen kommt. Wenn nun eine Richtung in sphärischen Koordinaten (θ, ϕ) gegeben ist, und eine kleine Winkelabweichung $d\theta$, $d\phi$, dann ist der differentiale Raumwinkel $d\omega$. Abbildung 2 verdeutlicht dies. [Wei02, Wyn00]

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{dA}{r^2} \\ d\omega &= (height)(width) \\ d\omega &= (d\theta)(sin\theta d\phi) \\ d\omega &= sin\theta d\theta d\phi \end{aligned} \tag{3}$$

1.1.2 Leuchtdichte (Radiance)

Die **Leuchtdichte** oder *Radiance* ist die lichttechnisch gesehen wichtigste Größe. Sie gibt an, wieviel Lichtenergie an einem bestimmten Punkt auf einer Oberfläche ankommt, beziehungweise von dort gesendet wird [YDP]. Die Einheit der Leuchtdichte ist

$$\frac{Watt}{m^2 sr} \tag{4}$$

Wie man aus der Formel ablesen kann, wird die Leuchtdichte pro normal zu der Lichtrichtung projizierten Einheitsfläche und pro Einheitsraumwinkel angegeben. Die Leuchtdichte hat eine wichtige Eigenschaft: Sie gehört zu den raumwinkelabhängigen Größen, die nicht abhängig von der Entfernung zur Lichtquelle sind. Sie verändert dabei ihren Wert entlang ihrer Fortschrittsrichtung bis zum Auftreffen auf eine Oberfläche nicht, zumindest im Vakuum. Innerhalb eines solchen leeren Raumes (von dem meist der Einfachkeit halber ausgegangen wird) lässt sich die Verteilung des Lichtflusses somit vollständig durch die

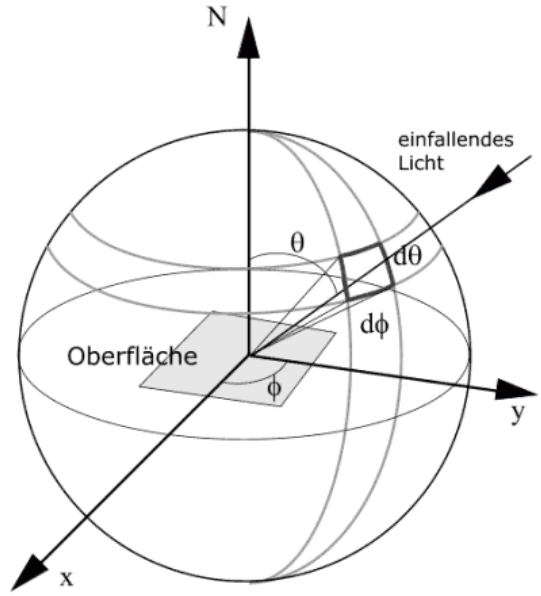

Abbildung 2: Der differentielle Raumwinkel (*differential solid angle*) ist die fett umrahmte Fläche auf der Einheitskugel.

von den Oberflächen ausgehende beziehungsweise auf diese einfallende Leuchtdichte beschreiben [Mül97].

Die Leuchtdichte ist definiert als der Lichtfluss, der von einer Oberfläche ausgestrahlt wird, pro Einheitsraumwinkel und pro perspektivisch verkleinerter Fläche, und hängt von der Richtung der Beleuchtung und des Betrachters ab. In der Literatur wird die Leuchtdichte meist mit L bezeichnet: [ON92]

$$L(\theta_r, \phi_r; \theta_i, \phi_i) = \frac{d\Phi_r(\theta_r, \phi_r)}{dA \cdot \cos\theta_r \cdot d\omega_r} \tag{5}$$

1.1.3 Bestrahlungsstärke (Irradiance)

Die **Bestrahlungsstärke** oder *Irradiance* beschreibt, wieviel Strahlungsleistung auf eine bestimmte Fläche auftrifft. Sie nimmt gemäß dem photometrischem Entfernungsgesetz mit dem Quadrat der Entfernung zur Strahlquelle ab, und gehört somit im Unterschied zur Leuchtdichte zu den raumwinkelunabhängigen Größen. Die Einheit der Bestrahlungsstärke ist

$$\frac{Watt}{m^2} \tag{6}$$

Sie wird in der Literatur häufig mit einem E (z.B. in [ON92]) bezeichnet, gelegentlich allerdings auch mit einem I (z.B. in [NIK89]), und ist definiert als eintreffender Lichtfluss pro Einheitsoberfläche, abhängig von der Richtung des einfallenden Lichtes (θ_i, ϕ_i):

$$E(\theta_i, \phi_i) = \frac{d\Phi_i(\theta_i, \phi_i)}{dA} \tag{7}$$

Die empfangene Gesamtleistung pro Oberflächenpunkt y kann durch Integration der über die beleuchtende Hemisphäre Ω_+ einfallenden Leuchtdichte bestimmt werden:

$$E(y) = \int_{\Omega_+} L(y, \vec{\omega}) \cdot (\vec{n_y} \cdot \vec{\omega}) d\omega \tag{8}$$

Hierbei bezeichnet $\vec{n_y}$ die Oberflächennormale im Punkt y, $(\vec{n_y} \cdot \vec{\omega})$ die normal zur Einfallsrichtung projizierte Fläche, und $d\omega$ den differentialen Raumwinkel um Richtung $\vec{\omega}$ [NIK89, ON92, Mül97].

1.2 Die BRDF

Mit Kenntnis der eben beschriebenen Größen ist es nun möglich zu sagen, dass eine bidirektionale Reflektionsverteilungsfunktion für eine gegebene Wellenlänge das Verhältnis aus der differentiellen Leuchtdichte (*Radiance*) dL_r in Betrachtungsrichtung und der differentiellen Bestrahlungsstärke (*Irradiance*) dE_l, die aus der Beleuchtungsrichtung auf die Oberfläche wirkt, beschreibt.

$$BRDF(\theta_i, \phi_i; \theta_r, \phi_r) = \frac{dL_r(\theta_r, \phi_r)}{dE_i(\theta_i, \phi_i)} = \tag{9}$$

$$= \frac{dL_r(\theta_r, \phi_r)}{L_i(\theta_i, \phi_i) \cdot \cos\theta_i \cdot d\omega_i} \tag{10}$$

$E_i(\theta_i, \phi_i)$ ist hierbei die aus der Richtung (θ_i, ϕ_i) einfallende Bestrahlungsstärke (oder *Irradiance*) und $dL_r(\theta_r, \phi_r)$ die reflektierte oder ausgehende Leuchtdichte (oder *Radiance*) in Richtung (θ_r, ϕ_r). Als Reflektivität beschreibt eine BRDF also einfach das Verhältnis von ausgehender Leuchtdichte zu eingehender Beleuchtungsstärke. Die Einheit der BRDF lautet daher:

$$[\frac{1}{sr}] \tag{11}$$

Durch Gleichung 10 wird der Zusammenhang zwischen Leuchtdichte und Bestrahlungsstärke deutlicher: $d\omega_i$ bezeichnet den Raumwinkel, unter dem die Lichtstrahlung auf den Oberflächenpunkt einfällt. Mit Hilfe des Terms $\cos\theta_i$ wird die vom Einfallswinkel abhängige Flächenverminderung berücksichtigt, denn ein auf eine Fläche mit dem Winkel θ zur Flächennormale einfallender Lichtstrahl trifft eine um den Faktor $\frac{1}{\cos\theta}$ größere differenzielle Fläche als ein zur Normale paralleler Strahl. Daher nimmt die Lichtintensität der beleuchteten Fläche um den Faktor $\cos\theta$ ab. [TL94, Wei02, NIK89]

1.3 Eigenschaften von BRDFs

Bidirektionale Reflektionsverteilungsfunktionen müssen zwei wichtige Eigenschaften erfüllen, um physikalisch korrekte Modelle darzustellen. Es sei erwähnt, dass man BRDFs modellieren kann, die diese Eigenschaften nicht haben, allerdings findet sich dann zu einem solchen Modell kein physikalisches Gegenstück.

Zum einen muss die *Helmholz-Reziprozität* gelten, die besagt, dass sich der Wert der BRDF nicht ändern darf, wenn man Einfalls- und Ausfallswinkel vertauscht. Mathematisch kann man dies ausdrücken, indem man die Gleichungen 12 und 13 gleichsetzt. Diesen Effekt macht man sich zum Beispiel beim Raytracing-Verfahren zunutze.

$$BRDF_\lambda(\theta_i, \phi_i; \theta_r, \phi_r) = \tag{12}$$

$$BRDF_\lambda(\theta_r, \phi_r; \theta_i, \phi_i) \tag{13}$$

Die zweite wichtige Eigenschaft von BRDFs ist die *Energieerhaltung*. Auch diese kann von BRDF-Modellen ignoriert werden, sollte aber für eine physikalisch plausible Definition einer BRDF gelten. Der Energieerhaltungssatz bezieht sich in diesem Fall auf die Lichtverteilung während der Licht-Materie-Interaktion. Wenn Licht auf eine Oberfläche auftrifft und von dort aus in verschiedene Richtungen reflektiert wird, kann die Summe des in alle Richtungen reflektierten Lichtes nicht größer sein als die Menge des einstrahlenden Lichtes:

$$\sum_r BRDF_\lambda(\theta_i, \phi_i; \theta_r, \phi_r) cos\theta_r d\omega_r \leq 1 \tag{14}$$

Für jede Einheit an Licht, die an einem Punkt an der Oberfläche ankommt, kann nicht mehr als eine Einheit Licht in alle möglichen Richtungen reflektiert werden. Wenn man diese Eigenschaft über die Hemisphäre aller möglichen Reflektionsrichtungen betrachtet, wird die Summe zu einem Integral: [YDP, Wyn00, Mül97]

$$\int_r BRDF_\lambda(\theta_i, \phi_i; \theta_r, \phi_r) cos\theta_r d\omega_r \leq 1 \tag{15}$$

Eine weitere oft erwähnte Eigenschaft von BRDFs ist, dass zwei Lichtstrahlen, die im gleichen Punkt auf eine Oberfläche treffen, sich einander nicht beeinflussen. Die Reflektionen, die durch Lichtstrahlen aus verschiedenen Richtungen resultieren, haben keinen Effekt aufeinander und können linear überlagert werden. Diese Eigenschaft nennt man Superposition. [Wei02] Ausserdem sollte noch noch erwähnt werden, dass eine

BRDF im Allgemeinen nur für eine bestimmte Wellenlänge gilt, wie z.B. bereits in den Gleichungen 12 bis 15 angedeutet.

1.4 Klassen von BRDFs

Bidirektionale Reflektionsverteilungsfunktionen können in zwei Klassen eingeteilt werden: BRDFs für isotrope und anisotrope Oberflächenstrukturen. Isotropie bedeutet für Oberflächen, dass die wahrgenommene Lichtintensität an einem Punkt sich nicht ändert, wenn die Oberfläche unter dem Betrachter gedreht wird. Beispielsweise hat glattes Plastik diese Eigenschaft. Das bedeutet, das BRDFs für isotrope Oberflächen nicht von den beiden Azimutwinkeln ϕ_i und ϕ_r abhängen, sondern nur von der Differenz zwischen beiden, wie Gleichung 16 zeigt.

$$\begin{aligned} BRDF_{isotrop} \quad & (\theta_i, \phi_i, \theta_r, \phi_r) = \\ BRDF \quad & (\theta_i, 0, \theta_r, \phi_r - \phi_i) \end{aligned} \tag{16}$$

Bei anisotropen Oberflächen ändert sich hingegen die Intensität des reflektierten Lichtes, wenn sich die Oberfläche um den Azimutwinkel dreht und die Deklinationswinkel beibehalten werden. Gebürstetes Metall, Satin oder Haare haben zum Beispiel anisotrope Oberflächen. In der Praxis haben fast alle realen Materialien Oberflächen mit untergründiger Anisotropie, allerdings gehören die meisten der analytischen BRDF Modelle zur Klasse der isotropen BRDFs. Abbildung 3 veranschaulicht den Unterschied zwischen isotropen und anisotropen Oberflächen. [TL94, Wyn00]

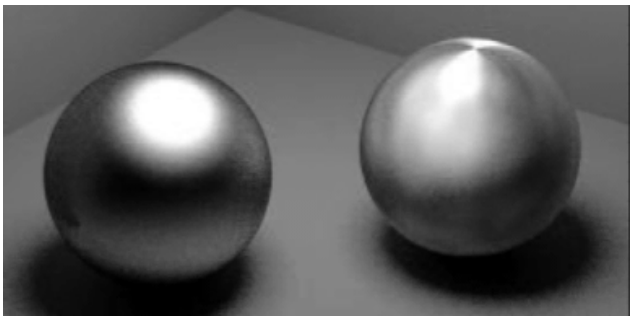

Abbildung 3: Links: Isotropes Material, Rechts: Anisotropes Material [Hab01]

1.5 Komponenten

Die bidirektionale Reflektivität kann in Komponenten aufgeteilt werden: Die Glanzlicht- (f_s, *specular*) und die diffuse Komponente (f_d):

$$f_r = sf_s + df_d \quad wobei \quad s + d = 1 \tag{17}$$

Ausser den direkten Lichtquellen, die diese Art der Beleuchtung hervorrufen, kann ein Objekt zusätzlich von einer Hintergrund- oder Umgebungsbeleuchtung (*ambient*) erhellt werden. Der Anteil dieser Beleuchtung ist überlicherweise klein, hat aber nicht unerheblichen Anteil am Aussehen einer Oberfläche. Es wird angenommen, dass die Reflektivität der Umgebungsbeleuchtung f_a unabhängig von der Betrachtungsrichtung ist und überall gleichmäßig auftrifft. Der reflektierte Anteil L_{ra} des eintreffenden ambienten Lichtes L_{ia} ist:

$$L_{ra} = f_a L_{ia} k \tag{18}$$

Wobei k bestimmt, welcher Teil der beleuchtenden Hemisphäre nicht von irgendwelchen Objekten blockiert ist:

$$k = \frac{1}{\pi} \int (\vec{N} \cdot \vec{L}) d\omega_i \tag{19}$$

Hierbei beschreibt die Einheitsvektoren $\vec{N}$ den Normalvektor der Oberfläche, und $\vec{L}$ die Richtung zum Licht.

Die Intensität des Lichtes, die den Betrachter erreicht, kann also nun als Summe der reflektierten Intensitäten von allen Lichtquellen plus der Intensität der ambienten Beleuchtung ausgedrückt werden:

$$L_r = f_a L_{ia} k + \sum_l L_{il} (\vec{N} \cdot \vec{L_l}) d\omega_{il} (sf_s + df_d) \tag{20}$$

Diese oder sehr ähnliche Aufspaltungen der Reflektivität in Komponenten werden in vielen Beleuchtungsmodellen verwendet, von denen einige in den folgenden Abschnitten vorgestellt werden. [CT81]

2 Modelle

Um die Reflektionseigenschaften einer bestimmten Oberfläche zu repräsentieren, kann man die Eigenschaften eines Materials messen, und die gewonnenen Daten dann in einer Matrix speichern. Um das Material aufgrund dieser Daten darzustellen, kann dann auf die einzelnen Werte interpoliert zurückgegriffen werden. Da es sich bei BRDFs aber um vierdimensionale Funktionen handelt, es dadurch zu einem nicht unerheblichen Datenvolumen kommt und diese Herangehensweise zudem nicht sehr flexibel ist, wird dies in der Praxis selten getan. Stattdessen versucht man ein theoretisches Modell zu entwickeln, und damit die Eigenschaften eines Materials zu approximieren. Meist wird dazu eine mathematische Formel aufgestellt, die mehrere Parameter hat. [Jar03]

Man unterscheidet hierbei zwischen zwei Arten von Modellen [War92]:

1. Empirische Modelle sind einfach eine Formel mit anpassbaren Parametern, die dazu entworfen worden ist, sich an eine Klasse von Reflektionsfunktionen anzupassen. Hierbei wird meist wenig Rücksicht auf die physikalische Herleitung der Formel oder die physikalische Bedeutung ihrer Parameter genommen. Ein Beispiel hierfür wäre das 1985 von Brian P. Sandford und David C. Robertson [SR85] vorgestellte empirische Modell, welches isotrope Reflektion unter Zuhilfenahme von vier Parametern beschreibt. Zwei dieser Parameter haben einen physikalischen Hintergrund, sie beschreiben messbare Werte, die anderen beiden Parameter jedoch nicht: Es handelt sich hierbei nur um Variablen, die das Modell den vom Material gemessenen Werten anpassen sollen.

2. Theoretische Modelle, wie beispielsweise das 1991 vorgestellte Modell von He [HTSG91], auf welches in dieser Arbeit noch näher eingegangen wird. Bei einem solchen Modell haben alle Parameter eine physikalische Bedeutung, und können zumindest theoretisch gemessen werden, wenn das zu beschreibende Material vorliegt.

Auf einige solche BRDF Modelle soll hier nun genauer eingegangen werden.

2.1 Lambert

Das relativ einfache Lambert-Modell beschreibt Oberflächen, die das Licht diffus reflektieren. Sie verstreuen das auf sie eintreffende Licht in alle Richtungen genau gleich stark. Das bedeutet, dass die ausgesendete Leuchtdichte einer solchen Lambert-Oberfläche unabhängig von der Richtung ist, aus der diese betrachtet wird, aber abhängig vom Winkel θ zwischen der Normale der Fläche und dem einfallenden Lichtstrahl. Es gibt zwei Arten, wie dieser Effekt in der Natur zustande kommt:

- Auf das diffuse Material eintreffende Lichtstrahlen werden von kleinen Unebenheiten an der Oberfläche des Materials sehr oft hin und herreflektiert, bevor sie dann wieder in den Raum zurückreflektiert werden. Wenn diese auftretenden mehrfachen Reflektionen zudem scheinbar auf zufällige Art und Weise geschehen, wird das Licht in alle Richtungen verstreut.

- Das Licht dringt in das Material ein, und trifft dort auf mikroskopisch kleine Unterschiede in der Dichte innerhalb des Materials. Das Licht wird hierbei an den Grenzen zwischen den verschiedenen Materialdichten immer wieder zerstreut, und irgendwann zum Teil wieder in den Raum zurückreflektiert, was die diffuse Reflektion bewirkt.

Eine Kombination aus beiden Möglichkeiten kann natürlich genauso Lambert-Reflektion erzeugen. Abbildung 4 skizziert diese beiden Reflektionsvorgänge. [NIK89]

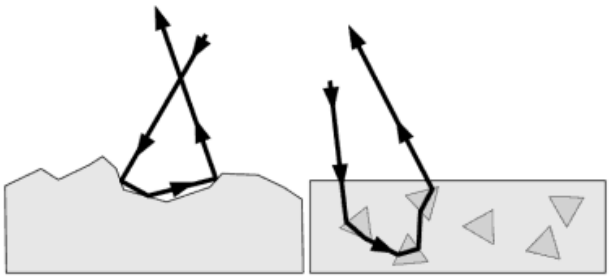

Abbildung 4: Diffuse Reflektion nach [NIK89]. Links: Durch Unebenheiten an der Oberfläche des Materials, Rechts: Durch Unterschiede in der Dichte innerhalb der Materials.

Eine perfekte diffuse Oberfläche wird Lambertscher Reflektor genannt. Da an jedem Punkt eines solchen Reflektors die gleiche Menge an Licht in alle Richtungen verstreut wird, muss das Verhältnis von eingehender zu ausgehender Beleuchtung konstant sein. Man kann also schreiben:

$$L_r = \frac{k_d}{\pi} E_i \tag{21}$$

$$f_r(\theta_i, \phi_i; \theta_r, \phi_r) = \frac{k_d}{\pi} \tag{22}$$

Hierbei ist k_d eine Konstante, die zwischen 0 und 1 liegt und als *diffuse Albedo*, diffuser Reflektionskoeffizient oder diffuse Reflektionskonstante bezeichnet wird. Sie beschreibt, wieviel Licht reflektiert wird, der restliche Anteil $(1 - k_d)$ wird absorbiert. Eine weiße, perfekt reflektierende Oberfläche hat eine Albedo von 1, eine schwarze hat eine von 0. Die Division durch π ist notwendig, da die BRDF über die kosinusgewichtete Hemisphäre integriert wird. [SH97, HB97]

Das Lambert-Modell ist bereits seit mehr als 200 Jahren bekannt, und weil es sehr einfach ist, findet es nahezu überall in der Computergrafik Anwendung. Nahezu jedes Programm, das 3D-Grafik anzeigt, setzt dieses Modell ein. Beispielsweise wurde die in Abbildung 5 gezeigte Kugel mit dem Freeware Raytracer Povray gerendert. Viele BRDF-Modelle, von denen auch einige in dieser Arbeit vorgestellt werden, verwenden das Lambert-Modell um die diffuse Lichtkomponente zu beschreiben.

Abbildung 5: Eine perfekt diffuse Kugel nach dem Lambert-Modell, gerendert mit POV-Ray. Das Licht wird von der Oberfläche gleichmäßg in alle Richtungen reflektiert.

2.2 Phong

Das bekannteste und in der Computergrafik auch heute noch oft benutzte Beleuchtungsmodell ist das Phong-Modell, das 1975 von Phong Bui Tong entwickelt wurde. Es ist mathematisch sehr einfach und dadurch nicht sonderlich rechenintensiv. Allerdings ist es nicht physikalisch basiert, weil es nicht den Energieerhaltungssatz einhält, das heisst, es kann zum Beispiel mehr Licht von einem Objekt ausgesendet werden, als auf es eingestrahlt wird. Mit dem Phong-Modell berechnete Bilder sind daher nicht unbedingt korrekt. [HB97, NNSK99]

Das **Phong specular-reflection model** wurde hauptsächlich entwickelt, um den Glanzeffekt (*specular highlights*) wiedergeben zu können, den manche Oberflächen zeigen.

Die Phong-BRDF kann man wie folgt aufschreiben:

$$\begin{aligned} f_{r,Phong,spec}(\vec{L},\vec{V}) &= k_s \cdot \frac{\cos^{n_s}\phi}{cos\theta} \\ &= k_s \cdot \frac{(\vec{R}\cdot\vec{V})^{n_s}}{(\vec{N}\cdot\vec{L})} \end{aligned} \quad (23)$$

Hierbei ist $\vec{L}$ die Richtung vom Punkt auf der Oberfläche zum Licht, $\vec{V}$ die Richtung zum Betrachter, und $\vec{R}$ die Richtung des idealen Glanzeffektes, was der über den Normalvektor $\vec{N}$ der Oberfläche gespiegelten Richtung entspricht. Es handelt sich hierbei um normalisierte Vektoren. k_s und n_s sind materialabhängige Konstanten. k_s ist der Glanzlicht-Reflektionskoeffizient (*specular-reflection coefficient*) und sollte zwischen 0 und 1 liegen. n_s beinflusst die Größe der Glanzlichtreflektion. Eine sehr glänzende Oberfläche hat große Werte für n_s wie z.B. 100, matte Oberflächen kleinere Werte bis 1. Für perfekte Reflektoren ist n_s unendlich. [HB97, MSKH00]

Der in Gleichung 23 aufgeschriebene Term beschreibt allerdings nur die Glanzlichtreflektion, mit der alleine ein Material etwas unrealistisch aussieht. Daher wird zu der Glanzlichtkomponente noch eine Komponente k_d für diffuses Licht hinzugerechnet, für die das im vorigem Abschnitt beschriebene Lambertmodell verwendet wird. [Lew93]

$$f_{r,Phong}(\vec{L},\vec{V}) = k_d + k_s \cdot \frac{(\vec{R}\cdot\vec{V})^{n_s}}{(\vec{N}\cdot\vec{L})} \quad (24)$$

2.2.1 Blinn Phong

Eine verbreitete Variante der Phong-Beleuchtung ist das sogenannte **Blinn-Phong-Modell**. James F. Blinn verbesserte das Phong-Modell und machte es visuell ein wenig ansprechender. Dazu wird der Halbvektor zwischen Licht- und Betrachterrichtung verwendet, der wie in Gleichung 25 berechnet wird. Abbildung 6 verdeutlicht den Unterschied zwischen Phong und Blinn-Phong.

$$\vec{H} = \frac{\vec{L}+\vec{V}}{\left|\vec{L}+\vec{V}\right|} \quad (25)$$

Die BRDF zum Blinn-Phong-Modell sieht wie folgt aus:

$$\begin{aligned} f_{r,Blinn}(\vec{N},\vec{H}) &= k_d + k_s \cdot \frac{cos^{n_s}\phi}{cos\theta} \\ &= k_d + k_s \cdot \frac{(\vec{N}\cdot\vec{H})^{n_s}}{(\vec{N}\cdot\vec{L})} \end{aligned} \quad (26)$$

Da Blinn-Phong recht einfach zu berechnen ist, wird es oft eingesetzt, beispielsweise von der heutigen Grafikhardware. Einige BRDF Modelle, die noch in dieser Arbeit besprochen werden, gehen vom Phong und/oder Blinn-Phong-Modell aus, adaptieren, erweitern oder modifizieren es. [NNSK99, MSKH00]

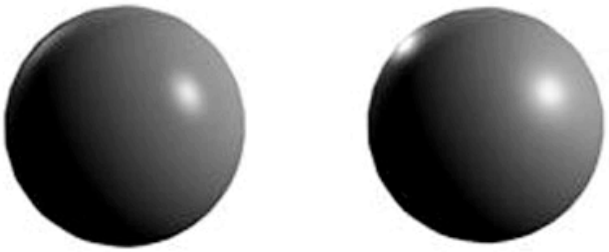

Abbildung 6: Zwei mit Phong-Shading gerenderte Kugeln. Links: Phong. Rechts: Blinn-Phong. [Cal]

2.3 Cook-Torrance

Das von Cook und Torrance 1982 vorgestellte Modell [CT81] wird auch manchmal als *Blinn-Cook-Torrance*-Modell bezeichnet, weil es auf Blinns Arbeit von 1977 [Bli77] aufbaut. Es eignet sich in der Praxis sehr gut zum Beschreiben von Metallen wie Kupfer und Gold, aber auch für andere interessante Materialien wie Plastik mit verschiedener Rauheit. Des weiteren ist dieses Modell in der Lage Oberflächen zu beschreiben, die eine betrachtungswinkelabhängige Farbe haben. [Wyn00]

Das Cook-Torrance-Modell verwendet die in Gleichung 17 bis 20 angegebene Aufteilung des reflektierten Lichtes, und konzentriert sich darauf, die einzige Reflektionslichtkomponente zu beschreiben, die von der Richtung des Betrachters abhängt, die Glanzlichtkomponente f_s. Dabei wird von Annahmen aus dem 1967 von Torrance und Sparrow vorgestellem Modell [TS67] ausgegangen, welches auf physikalischen Erkenntnissen basiert und sich kleiner Flächen bedient (oder Microfacetten), um das Reflektionsverhalten des Lichtes zu erklären. Dieses wird auch oft als Microfacetten-BRDF (micro facet BRDF) bezeichnet und viele andere Modelle bauen darauf und infolgedessen auch auf dem Cook-Torrance Modell auf. Dies liegt vielleicht auch daran, dass das Torrance-Sparrow Modell, als es 1967 vorgestellt wurde, das erste physikalisch basierte Modell war. [NNSK99]

Das Torrance-Sparrow-Modell beschreibt die Reflektionen an der Oberfläche mit Hilfe der Vorstellung eine rauen Oberfläche, den Microfacetten. Das Modell ist dabei aber nur korrekt, wenn die Wellenlänge des Lichtes kleiner als die Unebenheit der Oberfläche ist. Man vergleicht hierbei die Wellenlänge des Lichtes mit der RMS (*root-mean-square*, Wurzel der gemittelten Quadrate) der Unhebenheiten:

$$x_{rms} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2} \tag{27}$$

Es wird dabei davon ausgegangen, dass die Microfacetten alle glatt sind, und gleichmäßig auf der Oberfläche angeordnet sind. Sie reflektieren das einfallende Licht gemäß ihrer jeweiligen Neigung. Die Oberfläche, auf der sie liegen, hat eine mittlere Normale n, von der jede Microfacette eine um den Winkel α abweichende Neigung hat. Torrance und Sparrow haben dabei in ihrem Modell festgelegt, dass die Verteilung der Neigungswinkel der Flächen rotierend symmetrisch um die mittlere Normale der Oberfläche ist, und durch eine eindimensionale Funktion mit einer Konstante c repräsentiert werden kann:

$$p_\alpha(\alpha) = ce^{-\frac{\alpha^2}{2m^2}} \tag{28}$$

Die mittlere Neigung der Flächen hat den Wert $<\alpha> = 0$. m bezeichnet die Abweichung von der Neigung, und ist der einzige Parameter, der diese Funktion bestimmt. Je größere Werte man für m wählt, desto rauere Oberflächen beschreibt man. Es wird durch Gleichung 28 ein isotropes Material beschrieben, da die Neigungen der einzelnen Microfacetten im Verhältnis zur mittleren Ausrichtung n der Oberfläche symmetrisch sind.

Das hier vorgestellte Modell, das davon auszugeht, dass die Oberfläche des Materials aus einer Menge verschieden geneigter kleiner Flächen besteht, wird als Neigungsverteilungsmodell (*slope distribution model*) bezeichnet. Es hat sich gegen andere Modelle wie dem Höhenverteilungsmodell (*height distribution model*) bewährt, da sich verstreutes Licht in der Natur von den Neigungen und nicht z.B. von den Höhenunterschieden von Microfacetten beinflussen lässt. Des Weiteren hat es den Vorteil, dass nur ein Parameter benötigt wird, um eine Neigungsverteilung zu beschreiben. Der Nachteil, dass man für eine Verteilungsfunktion α schwer die Form der Oberfläche visualisieren und die Wurzel der mittleren Quadrate der Höhe schlecht schätzen kann, kann dafür in Kauf genommen werden.

Im Torrance-Sparrow-Modell wird davon ausgegangen, dass jede Microfacette neben einer anderen liegt, die die gleiche Neigung hat, aber in die Gegenrichtung orientiert ist, was V-förmige Löcher (*V-cavities*) in der Oberfläche erzeugt. Diese Annahme wird in manchen Stellen in der Literatur (z.B. in [Mei00]) als sehr unrealistisch kritisiert, da die Neigungen von benachbarten Microfacetten in der Natur für gewöhnlich nicht miteinander in Beziehung stehen.

Abbildung 7 skizziert grob, wie die Reflektion des Lichtes im Torrance-Sparrow-Modell berechnet wird:

Die Oberfläche wird von einer Lichtquelle beleuchtet, die in der $x - n$ Ebene liegt, und deren Licht im Winkel θ_i auf sie eintrifft. In diesem Fall ist nur Licht interessant, das im Winkel (θ_r, ϕ_r) die Oberfläche verlässt. Dieses Licht kann nur von den Microfacetten nach $d\omega_r$ reflektiert werden, deren Normalvektor innerhalb des Raumwinkels $d\omega'$ liegt. Mit Kenntnis der Winkel θ_i, θ_r und ϕ_r kann man den lokalen Beleuchtungswinkel θ_i' und auch die Neigung α der reflektierenden Microfacetten errechnen:

$$\theta_i' = \frac{1}{2}\arccos(\cos\theta_r\cos\theta_i - \sin\theta_r\sin\theta_i\cos\phi_r) \tag{29}$$

$$\alpha = \arccos(\cos\theta_i\cos\theta_i' + \sin\theta_i\sin\theta_i'\cos(\arcsin(\frac{\sin\phi_r\sin\theta_r}{\sin 2\theta_i'}))) \tag{30}$$

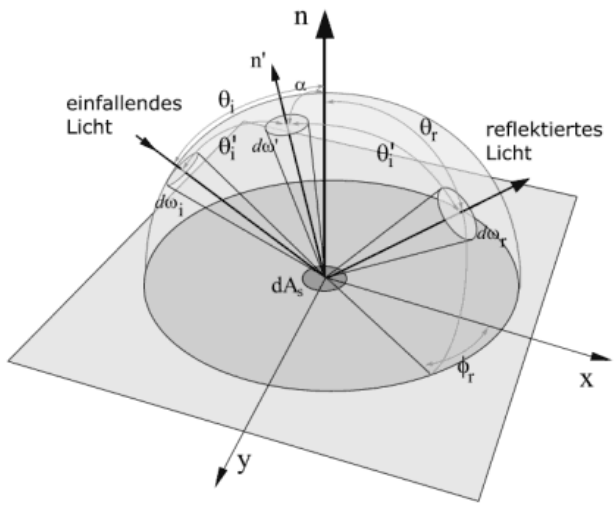

Abbildung 7: Geometrie des Torrance-Sparrow Modells nach [NIK89]

Um die Menge reflektierten Lichtes errechnen zu können, muss man nun wissen, wieviele Microfacetten in Richtung $d\omega'$ liegen. Durch die in Gleichung 28 definierte Verteilung der Microfacetten kennt man die Anzahl, sie ist:

$$p_\alpha(\alpha)d\omega' \tag{31}$$

Also ist die Menge der Microfacetten für den jetzt interessanten Bereich der Oberfläche:

$$p_\alpha(\alpha)d\omega' dA_s \tag{32}$$

Wird nun mit a_f die Größe der Fläche jeder Microfacette bezeichnet, dann kann die Fläche aller Facetten, die das Licht aus der Richtung θ_i in den Raumwinkel $d\omega_r$ reflektieren, folgendermaßen aufgeschrieben werden:

$$a_f p_\alpha(\alpha)d\omega' dA_s \tag{33}$$

Dadurch ergibt sich die Menge an Licht, die auf die reflektierenden Microfacetten trifft als: [NIK89]

$$d^2\Phi_i = L_i d\omega'_i(a_f p_\alpha(\alpha)d\omega' dA_s)\cos\theta'_i \tag{34}$$

Diese im Torrance-Sparrow Modell verwendete Gauss-Verteilungsfunktion der Microfacetten wird im Cook-Torrance-Modell dahingehend verallgemeinert, dass sie auch durch andere Verteilungsfunktionen ersetzt werden kann, beispielsweise durch die Phong-Verteilung mit dem Materialkoeffizienten c:

$$D_{Phong} = \cos^c(\alpha), c \leq 0 \tag{35}$$

Oder die Trowbridge-Reitz-Verteilung:

$$D_{Trowbridge-Reitz} = \frac{c^2}{\cos^2(\alpha)(c^2-1)+1}, 0 \leq c \leq 1 \tag{36}$$

Die Beckmann-Verteilungsfunktion wird von Cook und Torrance empfohlen:

$$D = \frac{1}{m^2 cos^4\alpha} e^{-(\frac{\tan(\alpha)}{m^2})^2} \tag{37}$$

Hierbei bezeichnet m die Wurzel der gemittelten Quadrate der Neigung der Facetten. Diese Funktion hat den Vorteil gegenüber anderen Verteilungsfunktionen, dass sie die Größe der Reflektion wiedergeben kann, ohne willkürliche Konstanten einzuführen. Allerdings ist sie langsamer zu berechnen.

Um Oberflächen beschreiben zu können, die mehr als eine Art der Rauheit, also mehrere Neigungen m_j haben, kann man die Verteilung auch als gewichtete Summe mehrerer Verteilungsfunktionen ausdrücken. Die Summe der Gewichtungen w_i muss hierbei 1 sein.

$$D = \sum_j w_i D(m_j) \tag{38}$$

Die Wellenlängenabhängigkeit der Reflektion wird nicht von der Unebenheit der Oberfläche beeinflusst, außer bei Oberflächen die fast perfekt glatt sind, und die eine Verteilung haben, die wellenlängenabhängig ist. Im Cook-Torrance-Modell wird eine solche wellenlängenabhänige Verteilungsfunktion ausgeschlossen, beziehungswiese der Einfachhalt halber ignoriert.

Um zu berechnen, welcher Teil des auf die Microfacetten eintreffenden Lichtes auch wieder reflektiert wird, verwendet das Modell zwei Terme:

1. Der Fresnel-Reflektions-Koeffizient. Augustin Jean Fresnel (1788-1827) war ein früher Vertreter der Lichtwellentheorie, und die von ihm abgeleiteten Formeln können die Reflektion von glatten Oberflächen, die nur vom Refraktionsindex des Materials und des eingehenden Lichtwinkels abhängen, darstellen und werden daher heute wie z.B. im Torrance-Sparrow Modell immer noch verwendet.

   Die Fresnel-Koeffizienten $F_{para}(\theta'_i, n, k)$ und $F_{perp}(\theta'_i, \eta')$ bestimmen das von einer planaren Oberfläche in die Glanzlichtrichtung reflektierte elektromagnetische Feld, wenn die eintreffende Lichtwelle parallele (F_{para}) beziehungsweise senkrechte (F_{perp}, von *perpendicular*) Polarisierung hat. Der im Torrance-Sparrow-Modell verwendete Fresnel-Koeffizient $F'(\theta'_i, n, k)$ kann jetzt als Linearkombination der beiden Fresnel-Koeffizienten F_{para} und F_{perp} für parallel und senkrecht eintreffende Lichtwellen wie folgt ausgedrückt werden:

$$F'(\theta_i', \eta') = hF'_{para}(\theta_i', \eta') + vF'_{perp}(\theta_i', \eta') \quad (39)$$

Hierbei bezeichnen n den Brechungsindex, k den Absorbtionsindex des Materials und h und v die Größenordnung der jeweiligen Polarisation einer Lichtwelle und deswegen müssen diese addiert 1 ergeben:

$$h, v \geq 0 \wedge h + v = 1 \quad (40)$$

F_{para} und F_{perp} sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
F_{perp} &= \frac{(c - G_1)^2 + G_2^2}{(c + G_1)^2 + G_2^2} \\
F_{para} &= \frac{(uc - G_1)^2 + (2nkc - G_2)^2}{(uc + G_1)^2 + (2nkc - G_2)^2} \\
G_1^2 &= \frac{1}{2}\left((u - s) + \sqrt{(u - s)^2 + 4n^2k^2}\right) \\
G_2^2 &= \frac{1}{2}\left(-(u - s) + \sqrt{(u - s)^2 + 4n^2k^2}\right) \\
u &= n^2 - k^2 \\
c &= \cos\theta_i' \\
s &= \sin^2\theta_i' \quad (41)
\end{aligned}$$

Hierbei bezeichnen n den Brechungsindex und k den Absorbtionsindex. Vom ersten Medium wird angenommen, dass $n_1 = 1$ und $k_1 = 0$, was in etwa der Luft entspricht. [Mei00] Wenn man annimmt, dass der Absorbtionsindex immer null ist, kann man nach Umformung den Fresnel-Koeffizienten so anschreiben:

$$\begin{aligned}
F &= \frac{(g - c)^2}{2(g + c)^2}\left(1 + \frac{(c(c + g) - 1)^2}{(c(c - g) - 1)^2}\right) \quad (42) \\
g &= \sqrt{n^2 + c^2 - 1}
\end{aligned}$$

Oft kommt es vor, dass man für die Beschreibung eines Materials nicht die wellenlängenabhängigen Brechungsindizes vorliegen hat. In diesem Fall kann man F für einen fixen Einfallswinkel (z.B. 0°) bestimmen, und den Brechungsindex durch Umformung des Fresnel-Koeffizienten annähern:

$$n = \frac{1 + \sqrt{F_0}}{1 - \sqrt{F_0}} \quad (43)$$

2. Der geometrische Abschwächungsfaktor (*geometrical attenuation factor*). Mit Hilfe dieses Terms wird beachtet, dass Microfacetten von angrenzenden Nachbarn und/oder Unregelmäßigkeiten in der Oberfläche überschattet werden können: Das Licht, das auf eine Facette treffen soll oder jenes, das von ihr reflektiert wird, könnte hierdurch abgehalten werden. Dieser Term wird mit $G(\theta_i, \theta_r, \phi_r)$ bezeichnet:

$$\begin{aligned}
G(\theta_i, \theta_r, \phi_r) &= min\,(1, G_{msk}, G_{shdw}) \\
G_{msk} &= \frac{2(\vec{N} \cdot \vec{H})(\vec{N} \cdot \vec{V})}{(\vec{V} \cdot \vec{H})} \\
&= \frac{2\cos\alpha\cos\theta_r}{\cos\theta_i'} \\
G_{shdw} &= \frac{2(\vec{N} \cdot \vec{H})(\vec{N} \cdot \vec{L})}{(\vec{V} \cdot \vec{H})} \\
&= \frac{2\cos\alpha\cos\theta_i}{\cos\theta_i'} \quad (44)
\end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $\vec{N}$ die Mittlere Oberflächennormale, $\vec{V}$ die Richtung zum Betrachter, $\vec{L}$ die Richtung zum Licht und $\vec{H}$ der Halbvektor zwischen den zwei letzgenannten Variablen. Durch $G(\theta_i, \theta_r, \phi_r)$ wird also einfach der größte Anteil an Licht gewählt, der durch Selbstbeschattung G_{shdw}(*self shadowing*) und Abblendung G_{msk} (*masking*) verloren wird. Abbildung 8 verdeutlicht den Unterschied zwischen Abblendung und Selbstbeschattung. [Lew93, NIK89]

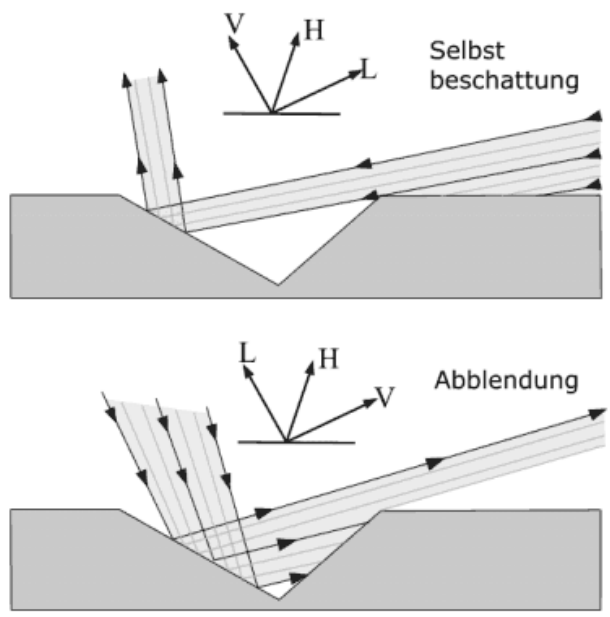

Abbildung 8: Der geometrische Abschwächungsfaktor beschreibt Selbstbeschattung (*self shadowing*) und Abblendung (*masking*).

Setzt man nun den Fresnel-Reflektionskoeffizienten F, den geometrischen Abschwächungsfaktor G und die Verteilungsfunktion für die Microfacetten auf der Oberfläche zusammen, dann erhält man die Cook Torrance BRDF für Glanzlichreflektion:

$$f_{r,Cook} = \frac{F}{\pi} \frac{DG}{(\vec{N} \cdot \vec{L})(\vec{N} \cdot \vec{V})} \tag{45}$$

Um die gesamte BRDF zu beschreiben, muss Gleichung 45 noch mit einer diffusen Komponente zusammengesetzt werden, wie in Gleichung 20 bereits beschrieben.

Bei älteren Modelle wie dem Phong- oder dem Blinn-Modell sehen alle Materialien aus, als würden sie aus einer Art Plastik bestehen, was an ihrer Glanzlichtkomponente liegt: Sie ist weiss, beziehungsweise hat sie die Farbe des auf sie eintreffenden Lichtes, die diffuse Komponente aber die des Materials. Bei Metallen ist das anders, hier trägt die diffuse Komponente wenig zum Erscheinungsbild bei, und d aus Gleichung 17 kann auf 0 gesetzt werden. Mit dem Cook-Torrance Modell kann man dies nachahmen und daher eignet es sich besonders gut zur Beschreibung von Plastiken und Metallen, wie Abbildung 9 zeigt. Abbildung 10 zeigt zudem eine Anzahl an verschiedenen mit dem Cook-Torrance-Modell gerenderten Materialien. [CT81]

Abbildung 9: Mit dem Cook-Torrance Modell gerenderte Vasen: links aus Plastik, rechts aus Kupfer. Im Vergleich zu früheren Modellen sieht Metall auch wirklich aus wie Metall. [CT81]

2.4 He

Das 1991 von He, Torrance, Sillion und Greenberg vorgestellte Modell ist eines der umfassendsten BRDF-Modelle. In der Literatur wird es vorwiegend als He- oder He-Torrance-Modell bezeichnet. Es berücksichtigt zum Beispiel von vorhergehenden Modellen bislang meist ignorierte Effekte wie Lichtstreuung unterhalb der Oberfläche (*subsurface scattering*) und anisotrope Oberflächen, ist hingegen aber sehr rechenintensiv. [YDP]

Im He Modell wird die bidirektionale Reflektivität in drei Komponenten aufgeteilt: Die Glanzlichtkomponente $f_{r,sp}$ (*specular*), die gerichtet diffuse $f_{r,dd}$ (*di-*

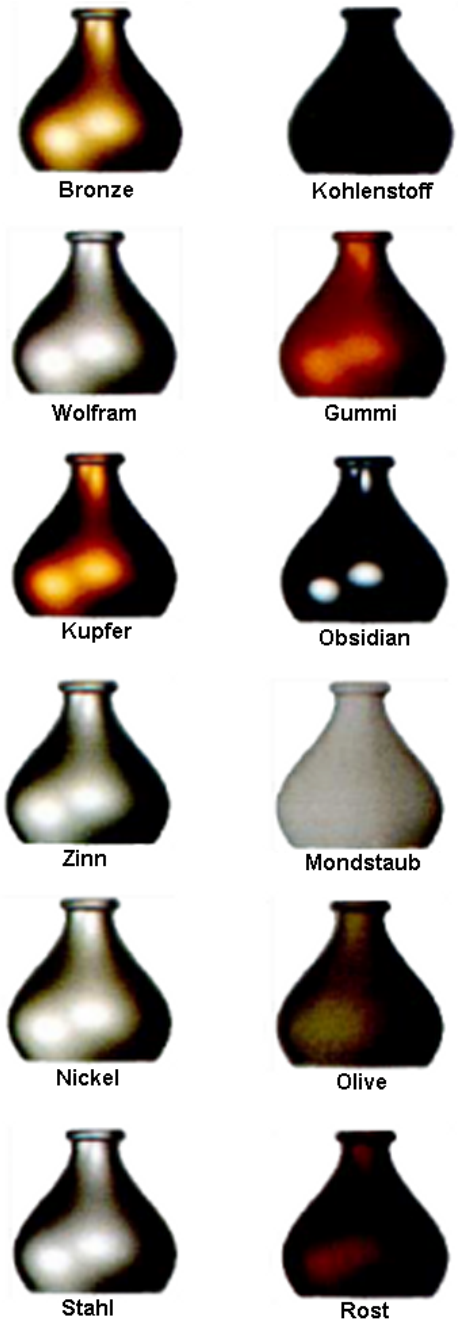

Abbildung 10: Einige verschiedene Materialien mit einer Cook-Torrance BRDF gerendert. Links metallische, rechts nicht metallische Materialien. Alle Materialien haben hierbei die gleiche Farbe für sowohl die Glanzlicht- als auch für die diffuse Komponente.[CT81]

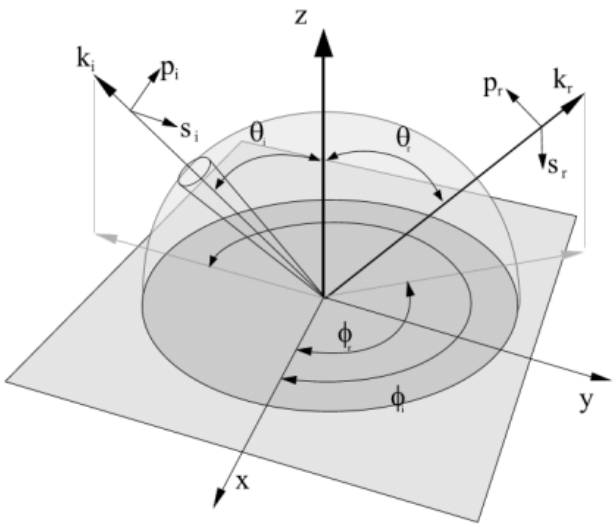

Abbildung 11: Eingabevariablen des He-Modells.[HTSG91]

rectional diffuse), und die gleichmäßig diffuse Komponente $f_{r,ud}$ (*uniform diffuse*):

$$f_r = f_{r,sp} + f_{r,dd} + f_{r,ud} \tag{46}$$

Die ersten beiden Komponenten der Reflektivität resultieren aus der direkten Oberflächenreflektion, während die letzte, die gleichmäßig diffuse (oder Lambert-) Komponente aus der mehrfachen Reflektion auf oder unterhalb der Oberfläche entsteht, wie in Abbildung 4 gezeigt wird. Sie trägt meist nur einen kleinen Beitrag zum Erscheinungsbild der Reflektion von metallischen Materialien bei, da diese eine nicht sehr starke Oberflächenrauheit besitzen. Für andere Materialien mit groben Oberflächenneigungsunterschieden oder starken Unterschieden der Dichte innerhalb der Oberfläche, wie Keramike oder Plastike, ist sie jedoch wichtig. Messungen und Schätzungen dieser mehrfachen Reflektionen an der Oberfläche und Lichtstreuungen unterhalb dieser besagen, dass das Licht nahezu gleichmäßig verteilt wird. Daher wird die gleichmäßig diffuse Komponente im He Modell einfach als lichtwellenabhängige Konstante $a(\lambda)$ angegeben:

$$f_{r,ud} = a(\lambda) \tag{47}$$

Diese kann theoretisch gemessen werden, wenn die V-förmigen Furchen in der Oberfläche dazu geeignet sind, beziehungsweise die Parameter der Lichtstreuung unterhalb der Oberfläche bekannt sind. Eine andere Möglichkeit, $a(\lambda)$ zu schätzen ist, man Gleichung 46 über die Hemisphäre zu integrieren und das Ergebnis mit von einem Kugelreflektometer gemessenen Werten der gerichteten Reflektivität vergleicht. Im Prinzip kann man aber einen freien Wert für $a(\lambda)$ annehmen, solange dieser den Energieerhaltungssatz nicht stört.

Die für die spiegelartige Reflektion verantwortliche Glanzlichtkomponente $f_{r,sp}$ aus Gleichung 46 wird im He-Modell so angeschrieben:

$$\begin{aligned} f_{r,sp} &= \frac{k_s}{\cos\theta_i d\omega_i} \cdot \Delta \\ &= \frac{|F|^2 \cdot e^{-g} \cdot S}{\cos\theta_i d\omega_i} \cdot \Delta \end{aligned} \tag{48}$$

Wobei k_s die Glanzlichtreflektivität ist, und δ eine Funktion, die dafür sorgt, dass die Glanzlichtkomponente nur verwendet wird, wenn die Reflektion innerhalb des Glanzlichtkegels ist:

$$\Delta = \begin{cases} 1 & \text{Wenn im Kegel} \\ 0 & \text{Ansonsten} \end{cases} \tag{49}$$

Weiters ist $|F|^2$ die bereits in Gleichung 39 erläuterte vom Brechungsindex $n(\lambda)$ abhängige Fresnel-Reflektivität des Materials und g beschreibt die Oberflächenrauheit durch folgenden Ausdruck:

$$g = \left[\left(\frac{2\pi\sigma}{\lambda}\right)(\cos\theta_i + \cos\theta_r)\right]^2 \tag{50}$$

Hierbei ist σ die mittlere Abweichung der Oberflächenhöhe.

Mit S wird die Abschattungsfunktion bezeichnet, die ausdrückt, welcher Teil der Oberfläche sowohl beleuchtet, als auch betrachtet wird und durch

$$S = S_i(\theta_i) \cdot S_r(\theta_r) \tag{51}$$

gegeben ist, wobei

$$\begin{aligned} S_i(\theta_i) &= \frac{1 - \frac{1}{2}\ \mathrm{erfc}\left(\frac{\tau\cot\theta_i}{2\sigma_0}\right)}{\Lambda(\tau\cot\theta_i) + 1} \\ S_r(\theta_r) &= \frac{1 - \frac{1}{2}\ \mathrm{erfc}\left(\frac{\tau\cot\theta_r}{2\sigma_0}\right)}{\Lambda(\tau\cot\theta_r) + 1} \end{aligned} \tag{52}$$

und

$$\Lambda(\cot\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi^{1/2}} \cdot \frac{\sigma_0}{\Lambda\cot\theta} - \ \mathrm{erfc}\left(\frac{\tau\cot\theta}{2\sigma_0}\right)\right) \tag{53}$$

σ_0 ist hierbei die Abweichung von der Oberflächenhöhe, und τ die Autokorrelationslänge, beides materialabhängige Parameter.

Anhand der Gleichungen 48 bis 53 kann man nun nachvollziehen, wie die Glanzlichtkomponente $f_{r,sp}$ im He-Modell den Anteil reflektierten Lichtes beschreibt:

Bei rauen Oberflächen wird das reflektierte Glanzlicht durch die Rauheit e^{-g} und den Abschattungsfaktor S vermindert. Bei glatten Oberflächen hingegen, wo die Wellenlänge λ des Lichtes wesentlich größer ist als die durch Projektion verminderte Oberflächenrauheit $\sigma_0 \cos\theta_i$, wird das Glanzlicht nicht beziehungsweise kaum abgeschwächt, da sich g an 0 und S an 1 annähert. Für perfekt glatte Oberflächen reduziert sich daher Gleichung 48 zu der für glanzlichtrefktierende Oberflächen gewöhnlichen bidirektionalen Reflektionsverteilungsfunktion:

$$f_{r,sp,glatt} = \frac{|F|^2}{\cos\theta_i d\omega_i} \tag{54}$$

Die letzte Komponente aus Gleichung 46, auf die noch nicht näher eingegangen wurde, ist die gerichtet diffuse Komponente $f_{r,dd}$. Sie ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} f_{r,dd} &= \frac{\mathcal{F}(\vec{n_b}, \vec{n_b}, p) \cdot S}{\cos\theta_i \cos\theta_r} \cdot \frac{\tau^2}{16\pi} \cdot \\ &\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^m e^- g}{m! \cdot m} \cdot e^{-\frac{v_{xy}^2 \tau^2}{4m}} \end{aligned} \tag{55}$$

Wobei p der Polarisierungszustandsvektor der hereinkommenden Strahlung ist, der sich aus den Polarisierungskoeffizienten c_s und c_p und den Einheitsvektoren der Polarisierung s_i und p_i, die von der Ebene (k_i, z) auf der das Licht auftritt, abhängig sind, zusammensetzt:

$$\begin{aligned} s_i &= \frac{k_i \times z_i}{|k_i \times z_i|} \\ p_i &= s_i \times k_i \\ p &= c_s s_i + c_p p_i \end{aligned} \tag{56}$$

Abbildung 11 verdeutlicht einige dieser Variablen ein wenig.

$\mathcal{F}$ ist eine Funktion, die die Fresnel-Koeffizienten miteinbezieht, und von den Polarisationskoeffizienten und -vektoren und $\vec{n_b}$, dem Einheitsvektor, der k_i und k_r halbiert, abhängt:

$$n_b = \frac{k_r - k_i}{|k_r - k_i|} \tag{57}$$

Mit v_{xy} wird eine einfache Funktion bezeichnet, die von der Beleuchtung und dem Reflektionswinkel abhängt, und die Wellenlängenänderung beschreibt:

$$\begin{aligned} v_{xy} &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\ v &= k(k_r - k_i) \end{aligned} \tag{58}$$

Hierbei bezeichnet k die Lichtwellenanzahl, die beispielsweise $k = 2\pi/\lambda$ sein kann.

Damit ist auch die dritte Komponente, die gerichtet diffuse Komponente des He-Modells, beschrieben. Wenn die Wellenlänge eintreffenden Lichtes kleiner oder ungefähr gleich groß ist wie die projizierte Rauheit der Oberfläche (z.B. $\lambda = \sigma \cos\theta_i$), dann kommt es zu Beugung und Interferenzeffekten. Wie man anhand der Gleichung 55 erkennen kann, hängt auch die gerichtet diffuse Komponente von der Rauheit der Oberfläche σ und der Autokorrelationslänge τ ab. Wenn sich bei glattten Oberflächen σ/λ oder g an 0 annähert, wird die bidirektionale gerichtet diffuse Reflektion auch null und kommt nicht mehr zum Tragen. Bei rauhen Oberflächen, wo σ/λ oder g groß sind, beschreibt diese Komponente die direkte Oberflächenreflektion.

Das He-Modell ist, wie man leicht anhand der großen Menge der verwendeten Gleichungen und Funktionen erkennen kann, recht aufwendig zu berechnen. Dafür kann man damit allerdings eine Vielzahl an verschiedenen Materialarten modellieren. Abbildungen 12 und 13 zeigen Beispielszenen, die unter Verwendung des He-Modells gerendert wurden. [HTSG91]

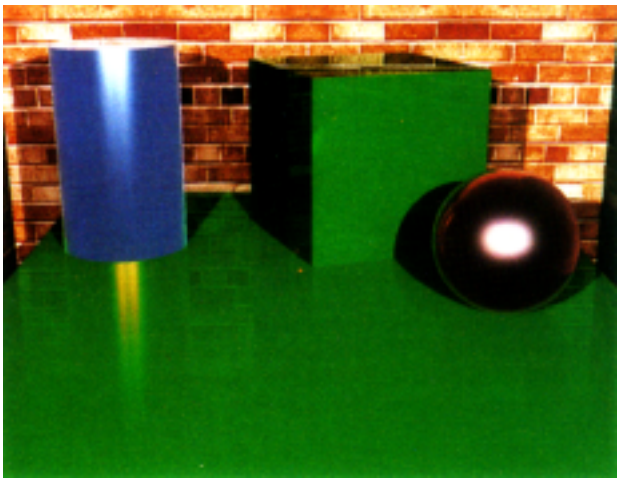

Abbildung 12: Eine mit dem He-Modell gerenderte Szene mit Objekten aus Plastik und Metall, mit rauen und glatten Oberflächen. [HTSG91]

2.5 Ward

Das 1992 von Gregory Ward vorgestellte theoretische Modell eignet sich zum Modellieren der anisotropen Reflektionseigenschaften von Materialien wie gebürstetem Metall oder Weihnachtsbaumverzierung. [Wyn00]

Das Ziel dieses Modelles ist es, physikalisch korrekt, jedoch einfach und schnell berechenbar zu sein. Der Hintergedanke dabei ist, dass Unkompliziertheit sehr wichtig in der Computergrafik ist: Beispielsweise

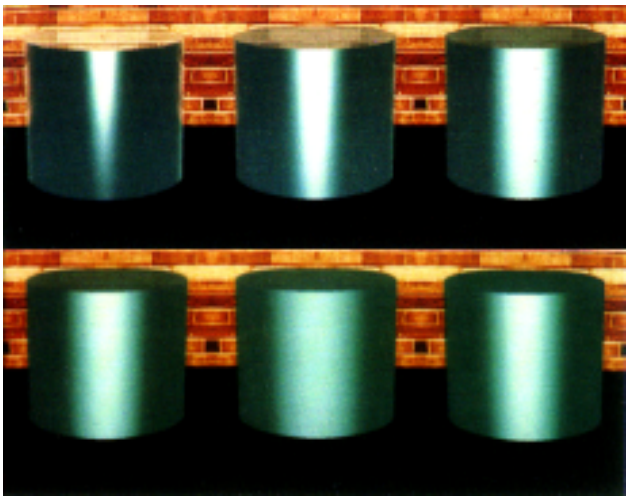

Abbildung 13: Sechs mit dem He-Modell gerenderte Aluminiumzylinder, die hier gut zeigen, wie sich die Glanzlicht- und die direkt-diffuse Komponenten bei verschiedenen Reflektionswinkeln und Oberflächenrauheiten σ_0 ändern. σ_0 ist beim oberen linken Zylinder 0.18, nimmt von links nach rechts und oben nach unten zu, bis es beim rechten unteren Zylinder einen Wert von 2.50 hat. [HTSG91]

wird das Phong-Modell immer noch sehr häufig in der Computergrafik verwendet, weil es schnell zu berechnen ist, obwohl es keine physikalische Entsprechung hat. Andere Modelle, die dies erfüllen, wie zum Beispiel das Torrance-Sparrow oder das He-Modell, sind dafür hingegen viel zu komplex.

Das Ward-Modell versucht nun gemessene Reflektionsdaten von möglicherweise anisotropen Oberflächen mit einer möglichst einfachen Formel durchführbarst genau wiedergeben zu können. Dazu bedient man sich der schon in vielen Modellen zuvor verwendeten und in Reflektionsfunktionen immer wiederkehrende Gauss-Verteilung. Wie beim Torrance-Sparrow Modell wird sie verwendet, um die statistisch verteilten Höhen oder Neigungsunterschiede einer Oberfläche zu beschreiben. Die überlicherweise von anderen Modellen an dieser Stelle verwendete Fresnel-Reflektions-Koeffizient und die geometrischen Abschwächungsfaktoren werden hier allerdings weggelassen beziehungsweise durch einen Normalisierungsfaktor ersetzt, der dafür sorgt, dass die Verteilung einfach und vorhersehbar über die Hemispähre integrierbar ist. Die geometrischen Abschwächungsfaktoren wirken in der Praxis oft dem Fresnel-Reflektions-Koeffizienten entgegen und weil diese beiden ohnehin schwer zu integrieren sind und die BRDF nur verkomplizieren würden, kommt das diesem Vorhaben sehr entgegen. Das auf diesen Überlegungen basierende isotrope gausssche Reflektionsmodell hat folgende Form:

$$f_{r,Ward,iso} = \frac{k_d}{\pi} + k_s \frac{1}{\sqrt{\cos\theta_i \ \cos\theta_r}} \cdot \frac{e^{-\tan^2\delta/\alpha^2}}{4\pi\alpha^2} \tag{59}$$

Hierbei geben k_d die diffuse und k_s die Glanzlichtreflektivität an. α bezeichnet die Standardabweichung von der Wurzel der gemittelten Quadrate der Oberflächenneigung, und δ ist der Winkel zwischen der Normale der Oberfläche und dem Halbvektor, wie in Abbildung 14 gezeigt wird. Die Werte k_d und k_s können je nach Material frei gewählt werden, solange gilt:

$$k_s + k_d < 1 \tag{60}$$

Der Normalisierungsfaktor wurde, wie aus Gleichung 59 ersichtlich wie folgt gewählt:

$$\frac{1}{4\pi\alpha^2} \tag{61}$$

Hierbei sollte für α ein Wert unter 0.2 gewählt werden, ansonsten wird die Reflektion sehr diffus.

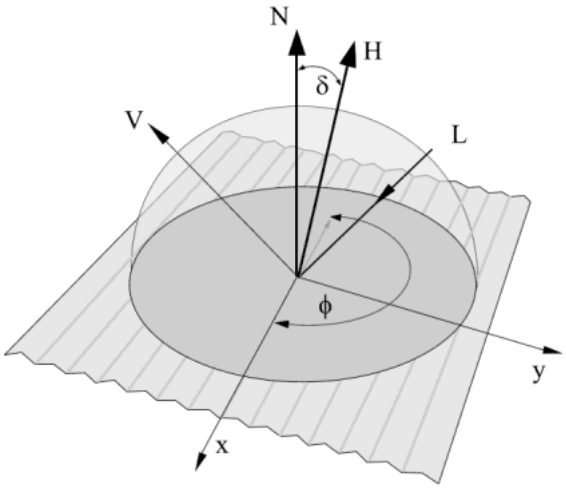

Abbildung 14: Materialunabhängige Eingabevariablen des Ward-Modelles nach [War92]. Das Licht kommt aus Richtung L und wird von V betrachtet. H ist der Halbvektor dazwischen, und θ ist dessen Azimutwinkel.

Dieses Modell ist physikalisch korrekt, erhält die Helmholz-Reziprozität und genügt im Gegensatz zum Phong-Modell dem Energieerhaltungssatz. Letzteres wird durch die Normalisierung erreicht, die laut Ward sonst in anderen Modellen wie zum Beispiel im He-Modell stark vernachlässigt wird.

Das gezeigte isotrope gaussche Modell kann nun recht einfach dahingehend erweitert werden, Oberflächen mit senkrecht aufeinander stehenden oder überhaupt voneinander unabhängigen Neigunsverteilungen auf der Oberfläche modellieren zu können:

$$f_{r,Ward,aniso} = \frac{k_d}{\pi} + k_s \frac{1}{\sqrt{\cos\theta_i \ \cos\theta_r}} \cdot \frac{e^{-\tan^2\delta(\cos^2\phi/\alpha_x^2 + \sin^2\phi/\alpha_y^2)}}{4\pi\alpha_y\alpha_x} \tag{62}$$

Wobei α_x und α_y die jeweiligen Standardabweichungen von der Wurzel der gemittelten Quadrate der Oberflächenneigungen für jede der beiden Neigungsverteilungen sind.

Um das Ziel der einfachen Berechnung dieses Modelles ein wenig weiter zu verfolgen, kann eine leichter zu berechnende Annäherung an Gleichung 62 so angeschrieben werden:

$$f_r = \frac{k_d}{\pi} + k_s \frac{1}{\sqrt{\cos\theta_i \ \cos\theta_r}} \cdot \frac{1}{4\pi\alpha_x^2\alpha_y^2} \cdot e^s$$

Wobei:

$$\begin{aligned}
s &= -2\frac{\left(\frac{h\cdot\vec{x}}{\alpha_x}\right)^2 + \left(\frac{h\cdot\vec{y}}{\alpha_y}\right)^2}{1 + h\cdot\vec{n}} \\
h\cdot\vec{x} &= \frac{\sin\theta_r\cos\phi_r + \sin\theta_i\cos\phi_i}{|\vec{H}|} \\
h\cdot\vec{y} &= \frac{\sin\theta_r\sin\phi_r + \sin\theta_i\sin\phi_i}{|\vec{H}|} \\
h\cdot\vec{n} &= \frac{\cos\theta_r + \cos\theta_i}{|\vec{H}|} \\
|\vec{H}| &= \sqrt{2 + \sin\theta_r\sin\theta_i q + 2\cos\theta_r\cos\theta_i} \\
q &= (\cos\phi_r\cos\phi_i + \sin\phi_r\sin\phi_i) \\
\vec{H} &= \vec{L} + \vec{V} \\
h &= \frac{\vec{H}}{|\vec{H}|} \\
cos\theta_r &= \vec{V}\cdot\vec{N} \\
cos\theta_i &= \vec{L}\cdot\vec{N}
\end{aligned} \tag{63}$$

Die in diesen Gleichungen neu auftretenden Variablen sind die in der Ebene liegenden Einheitsvektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$, wobei $\vec{y}$ senkrecht auf $\vec{x}$ steht.

Wie gefordert, haben alle in den Gleichungen 59 bis 63 auftretenden Variablen eine physikalische Bedeutung, und können demnach eingesetzt werden, wenn man die dazu nötigen Daten des zu modellierenden Materials zur Verfügung hat. Wenn p_d und p_s zusammen kleiner als 1 sind und die Werte für α beziehungsweise α_x und α_y nicht zu gross sind, ergibt sich eine physikalisch korrekte bidirektionale Reflektionsverteilungsfunktion. Dies kann man zum Beispiel dadurch überprüfen, indem man von einem echtem Material gemessene Werte mit denen der Funktion vergleicht. Solche Vergleiche zeigen, dass das Ward-Modell zur Modellierung vieler Materialien geeignet ist, es aber auch Materialien mit Reflektivität gibt, die nicht durch dieses Modell approximiert werden können. Abbildung 15 zeigt das Ward-Modell in Aktion. [War92]

2.6 Schlick

Christophe Schlick stellte 1994 ein Modell vor, das ähnlich wie das Ward-Modell als ein Mittel zwischen empirischem und theorethischem Modell die Möglichkeit bietet, Reflektionen möglichst physikalisch plausibel zu beschreiben. Dabei ist es einfach und effizient, es kommt also mit möglichst wenig Parametern aus und ist zudem schnell zu berechnen, sodass es möglich ist, es in der Computergrafik, möglicherweise sogar in Hardwareimplementierungen, einzusetzen.

Einige andere gute Gründe, dieses neue Modell zu verwenden sind:

- Wie in der Einleitung besprochen, wird die bidirektionale Reflektionsverteilung üblicherweise in zum Beispiel eine diffuse und eine Glanzlicht-Komponente aufgeteilt, und als Linarkombination dieser beiden dargestellt (siehe zum Beispiel Gleichung 17). Die Begründung hierfür ist, dass die Komponenten aufgrund verschiedener physikalischer Phänomene entstehen, und dadurch auch verschiedene Farben haben können. Die konstanten Gewichtungen, die bei der Linearkombination verwendet werden, sind nun aber genaugenommen physikalisch inkorrekt, da sie in der Natur nicht konstant sind, sondern vom einfallendem Winkel des Licht abhängig sind. Beipielsweise wird bei lackiertem Holz das meiste Licht bei grossem Einfallswinkel als Glanzlicht durch den Lack, bei kleineren Winkeln jedoch diffus durch das Holz reflektiert. Bei Metallen ist eine solche Linarkombination auch hinfällig, da es, je nach Rauheit der Oberfläche fast nur perfekte Glanzlichreflektoren oder perfekte diffuse Reflektoren unter den Metallen gibt.

- Der geometrische Abschwächungsfaktor (Gleichung 44) wird in vielen Modellen benutzt, um Selbstbeschattung und Abblendung von Microfacetten auf der Oberfläche zu beschreiben. Hierbei wird nicht berücksichtigt, dass abgeblocktes

Abbildung 15: Das Ward-Modell in Aktion aus [War92]. Oben: Das Foto eines Stuhls, der von 2 Lampen, direkt hinter und über ihm, beleuchtet wird. Die beiden anderen Bilder wurden gerendert, das mittlere mit dem isotrope gaussschen Reflektionsmodell aus Gleichung 59, das untere mit Hilfe der anisotropen Variante in Gleichung 62.

Licht in der Natur dabei nicht ohne weiteres absorbiert wird, sondern in andere Richtungen weiterreflektiert wird.

- Empirische BRDFs sind zwar nicht physikalisch korrekt, aber schnell zu berechnen, während sich dies bei theoretischen Modellen genau andersherum verhält: Es zahlt sich meist nicht aus, sie in Renderern einzusetzen, wenn sie zu komplex und rechenaufwendig sind. Der wichtigste Punkt hierbei aber ist: Sie sind meist unnötig präzise im Vergleich zu anderen Vorgängen in einer Renderingpipeline. Daher liegt es nahe, solche Modelle durch einfachere zu ersetzen.

Um eine neue einfacher zu berechnende BRDF zu erhalten, ist es ratsam, komplizierte Terme wie den Fresnel-Reflektions-Koeffizienten (Gleichungen 39 bis 40) durch eine einfachere Approximation zu ersetzen. Hierfür verwendet Schlick eine Methode, die er rationale Bruchannäherung (*rational fraction approximation*) nennt. Hierbei betrachtet man einfach die Charakteristika einer anzunähernden Funktion, und findet einige Kernbedingungen, das sind die Funktionswerte, die die Funktionsannäherung sicher haben soll. Dann versucht man die Funktion durch einen Bruch auszudrücken, der soviele Parameter hat, wie zu erfüllende Kernbedingunen.

Mit dieser Methode wird der Fresnel-Reflektions-Koeffizient auf eine recht einfache Gleichung, die nur noch 4 Multiplikationen und 2 Additionen benötigt, reduziert:

$$F_\lambda(u) = f_\lambda + (1 - f_\lambda)(1 - u)^5 \tag{64}$$

Hierbei ist u das Punktprodukt zwischen Licht- und Betrachtungsvektor. Die Funktion ist damit nur noch von f_λ, der spektralen Verteilung abhängig. Der Brechungsindex und Absorbtionsindex des Materials werden hier vernachlässigt, weil sie nur wenig Auswirkung auf die Gestalt der Funktion haben. Diese Annäherung hat nur eine Abweichung von in etwa 1%.

Weil der in Gleichung 44 beschriebene geometrische Abschwächungsfaktor unter anderem gleichbleibend bei Drehung um den Normalvektor und unabhängig von der Oberflächenrauheit ist, wird eine andere Formulierung verwendet, um die Abschattung von Microfacetten zu beschreiben:

$$\begin{aligned} G(v, v') &= G(v)\, G(v') \\ G(v) &= \frac{g}{g+1} \\ g &= \sqrt{h\pi}(2 - erfc\sqrt{h}) \\ h &= \frac{v^2}{2m^2(1-v^2)} \end{aligned} \tag{65}$$

Wobei v und v' die in Gleichung 44 den Reflektionswinkel $\cos\theta_i$ und Einfallswinkel $\cos\theta_r$, und m als Wurzel der gemittelten Quadrate der Unhebenheiten die Neigung der Microfacetten auf der Oberfläche bezeichnen.

Dieser Abschwächungsfaktor kann nun durch folgende vereinfachte Gleichung approximiert werden:

$$G(v) = \frac{v}{v - kv - k} \tag{66}$$

wobei

$$k = \sqrt{\frac{2m^2}{\pi}} \tag{67}$$

Wenn man zusätlich k und $k-1$ vorberechnet, benötigt diese Funktion nur eine Addition, eine Multiplikation und eine Division, und approximiert die Originalfunktion recht gut.

Für die Neigunsverteilungsfunktion trifft Schlick die gleiche Wahl wie Cook und Torrance: Die Beckmannverteilungsfunktion (Gleichung 37). Diese Funktion ist ein wenig schwieriger zu approximieren, aber dennoch lässt sich eine ähnliche Funktion finden, die nur mit einer Division, 4 Multiplikationen und 2 Additionen auskommt:

$$\begin{aligned} D &= \frac{m^3 x}{t(mx^2 - x^2 + m^2)^2} \\ x &= t + m - 1 \end{aligned} \tag{68}$$

Hierbei ist t das Punktprodukt zwischen dem Halbvektor und der Normale der Oberfläche, welches auch durch $\cos(\delta)$ auszudrücken wäre, wie in Abbildung 14.

Setzt man die beschriebenen Terme F, G und D zusammen wie in Gleichung 45, dann erhält man ein angenähertes Cook-Torrance-Modell, das aber wesentlich schneller zu berechnen ist und das sich sogar in Hardware realisieren ließe, da es nur mit wenigen einfachen Operationen, also nur Additionen, Multiplikationen und Divisionen, auskommt.

Im Unterschied zu nahezu allen bisher vorgestellten Modellen verwendet Schlick keine Aufspaltung der BRDF in Glanzlicht-, Umgbebungs- und diffuse Komponenten. Stattdessen wird von einem Schichtmodell ausgegangen. Es wird zwischen Oberflächen mit homogenen, und solchen mit heterogenen optischen Eigenschaften unterschieden:

- Heterogene Materialen bestehen aus zwei Schichten, wobei die obere ein wenig transparent ist. Lackierte oder bemalte Oberflächen, aber auch Plastik oder Haut sind Beispiele hierfür.
- Homogene Oberflächen bestehen aus nur einer Schicht, wie z.B. Metall, Glas oder raues Papier.

Ausser den Eingangs- und Ausgangswinkeln benötigt Schlick's BRDF drei weitere Parameter, die alle einen Wert zwischen 0 und 1 annehmen müssen:

1. C_λ, der Reflektionsfaktor, abhängig von der Wellenlänge λ. Dieser Parameter kann auch als Reflektivität bei Lichteinfall von oben angesehen werden, wie f_λ aus Gleichung 64.
2. r, der Rauheitsfaktor der Oberfläche. Er ist 0 für glatte Oberflächen und perfekte Glanzlicht-Materialien, und 1 für raue Oberflächen, perfekte lambertsche Reflektoren. r steht in direkter Beziehung zu m, der Wurzel der gemittelten Quadrate der Unhebenheiten. Da m in der Natur meist einen Wert ≤ 0.5 hat, könnte man für r schreiben: $r = \frac{m}{0.5}$
3. p, der Isotropie-Faktor. Er ist 0 für perfekt anisotrope Oberflächen, und 1 für perfekt isotrope Oberflächen. Man kann p erklären als das Verhältnis zwischen den Richtungen der Kratzer in die eine Richtung und der in die darauf normalstehende Richtung bei anisotropen Oberflächen.

Je nachdem ob man nun die Reflektionsverteilung eines homogenen oder eines heterogenen Materials beschreiben möchte, wählt man nun eine der beiden folgenden BRDFs:

$$f_{\lambda,hom}(t,u,v,v',w) = S_\lambda(u)D(t,v,v',w) \tag{69}$$

$$\begin{aligned} f_{\lambda,het}(t,u,v,v',w) &= S_\lambda(u)D(t,v,v',w) + \\ &\quad [1 - S_\lambda(u)]S'_\lambda(u) \\ &\quad D'(t,v,v',w) \end{aligned} \tag{70}$$

Je nachdem, welchen Effekt man erreichen möchte, kann man nun für $S_\lambda(u)$ und $D(t,v,v',w)$ verschiedene Terme einsetzen. Schlick zeigt mehrere Möglichkeiten auf, nach deren Kombination man insgesamt sechs verschiedene BRDFs erhalten kann.

Für $S_\lambda(u)$, den Spektralfaktor, kann einfach der Reflektionsfaktor verwendet werden:

$$S_\lambda(u) = C_\lambda \tag{71}$$

Da dieser aber in der Natur vom Fresnel-Faktor abhängt, liegt es nahe, ihn in Gleichung 64 zu einzusetzen:

$$S_\lambda(u) = C_\lambda + (1 - C_\lambda)(1 - u)^5 \tag{72}$$

Für $D(t,v,v',w)$, den Richtungsfaktor, (*directional factor*) setzt man einen Term ein, in dem die Abhängigkeit vom Zenit- und Deklinationswinkel durch zwei Faktoren $Z(t)$ und $A(w)$ ausgedrückt wird:

$$D(t,v,v',w) = \frac{1}{4\pi vv'} Z(t)A(w) \tag{73}$$

$$Z(t) = \frac{1}{(1+rt^2-t^2)^2} \tag{74}$$

$$A(w) = \sqrt{\frac{p}{(p^2+p^2w^2w^2)^2}} \tag{75}$$

Hierdurch wird genau der gewüschte Effekt erreicht: Wenn $r = 1$, dann wird $Z(t)$ zu einer konstanten Funktion und beschreibt einen perfekten Lambert-Reflektor. Wenn r aber gegen 0 geht, dann wird ein Glanzlicht-Reflektor beschrieben. Ähnliches gilt für $A(w)$; wenn $p = 1$, wird eine isotrope, wenn $p = 0$, eine anisotrope Oberfläche beschrieben.

Wenn nun noch der geometrische Abschwächungsfaktor miteinbezogen werden soll, verwendet man folgende Gleichung:

$$D(t,v,v',w) = \frac{G(v)G(v')}{4\pi vv'} Z(t)A(w) + \frac{1-G(v)G(v')}{4\pi vv'} \tag{76}$$

Der letzte Term in Gleichung 76 sorgt dafür, dass durch den Abschwächungsfaktor blockiertes Licht auch wieder reflektiert wird, statt es unrealistischerweise zu absorbieren.

Weil Gleichung 73 nicht wirklich einen vollständigen Übergang zwischen perfektem Lambert- und perfektem Glanzlicht-Reflektor beschreiben kann, wird eine dritte Möglichkeit, $D(t,v,v',w)$ darzustellen, vorgeschagen:

$$D(t,v,v',w) = \frac{a}{\pi} + \frac{b}{4\pi vv'} B(t,v,v',w) + \frac{c}{v'd\omega}\ \Delta \tag{77}$$

Wobei $B(t,v,v',w)$ aus Gleichung 73 oder 76 einzusetzen ist und $a+b+c=1$ gelten muss. Außerdem ist es nicht nötig, dass man die Gewichtungen a,b, und c als Parameter übernimmt, es ist physikalisch plausibler sie automatisch aufgrund des Rauheitsfaktors berechnen zu lassen: Wenn r kleiner ist als 0.5, dann wählt man $b = 4r(1-r), a = 0, c = 1-b$ und ansonsten $b = 4r(1-r), c = 0, a = 1-b$.

Die Abbildungen 16 und 17 zeigen einige mit dem Schlick-Modell gerenderte Zylinder, und demonstrieren, wie es die Übergänge zwischen diffusen und Glanzlichreflektoren und zwischen isotropen und anisotropen Oberflächen darstellen kann. [Sch94]

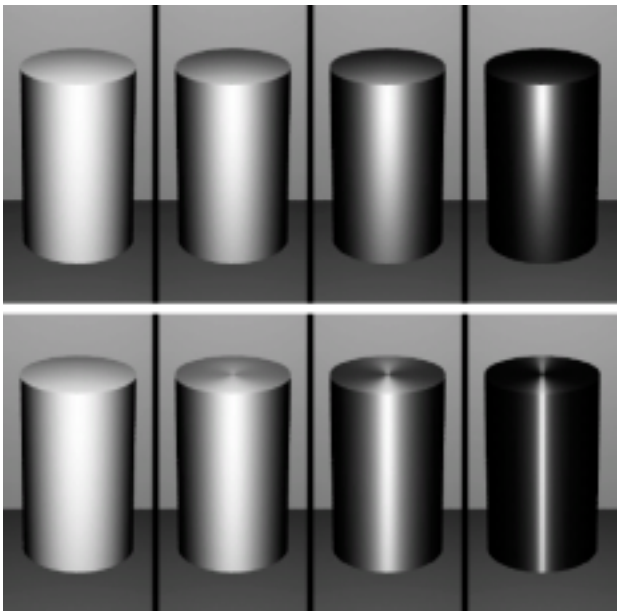

Abbildung 16: Mit dem Schlick-Modell gerenderte Zylinder, beleuchtet von einer Lichtquelle. Oben: Von diffusen zu Glanzlichreflektoren mit Werten für r von 1 bis 0.05. Unten: Von isotropen zu anisotropen Materialien mit Werten für p von 1 bis 0.05. [Sch94]

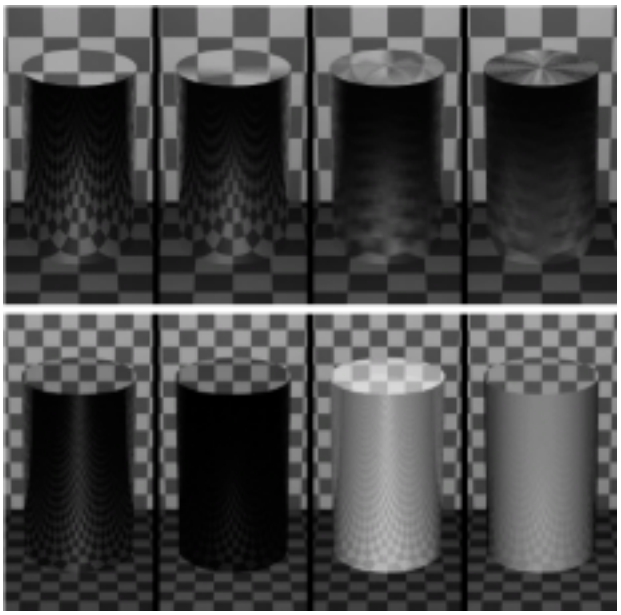

Abbildung 17: Wie Abbildung 16, nur diesmal wird der Fresnel-Faktor in die Berechnung mit einbezogen und die BRDF für heterogene Oberflächen (Gleichung 70) wird verwendet. [Sch94]

2.7 Lafortune

Das sogenannte klassische *cosine-lobe*-Modell wurde 1993 von Robert R. Lewis vorgestellt. Es handelt sich dabei um eine Erweiterung des Phong-Modells um einen Energieerhaltungsfaktor und die Einhaltung der Helmholz-Reziprozität. Lafortune generalisierte dieses Modell 1997 und daher ist dieses nicht nur als Lafortune-Modell, sondern auch oft einfach als generalisiertes cosine-lobe-Modell in der Literatur zu finden. [LFTG97, Lew93]

Das klassische cosine-lobe-Modell kann so angeschrieben werden:

$$f_r(L,V) = k_s C_s cos^n \alpha \tag{78}$$

Hierbei ist α der Winkel zwischen der Betrachtungsrichtung V und der gespiegelten einfallenden Richtung L, die in den folgenden Gleichungen mit L_m (m für *mirrored*) bezeichnet wird. C_s ist der Normalisierungsfaktor, für den $\frac{n+2}{2\pi}$ gewählt wird und k_s ein Wert zwischen 0 und 1, die Albedo des Lobus. n ist ist der Glanzlichtexponent, der die Größe des Glanzlichteffektes festlegt. Man kann Gleichung 78 auch anders, mit Hilfe einer Householder Matrix, die das Spiegeln um die Normale N ausdrückt, anschreiben:

$$\begin{aligned} f_r(L,V) &= k_s C_s [L_m \cdot V]^n \\ &= k_s C_s [L^T (2NN^T - I)V]^n \end{aligned} \tag{79}$$

Dieses Modell hält im Gegensatz zum Phong-Modell, auf dem es basiert, sowohl die Helmholz-Reziprozität als auch den Energieerhaltunssatz ein. Generalisierungsversuche, die nur die Reflektionslobes skalieren, bewirken aber, dass diese vorteilhaften Eigenschaften verloren gehen. Bei der von Lafortune durchgeführten Generalisierung dieses Modelles ist dies hingegen nicht der Fall. Dabei wird die Housholdermatrix und der Normalisierungsfaktor aus Gleichung 79 durch eine 3x3 Matrix M ersetzt, wodurch man nun insgesamt 10 Parameter bekommt um den lobe zu formen, wenn man man den Exponent n mitzählt:

$$f_r(L,V) = k_s [L^T M V]^n \tag{80}$$

Es gelten hierbei allerdings einige Einschränkungen: Damit die Helmholz-Reziprozität weiterhin gilt, muss die Matrix M symmetrisch sein: $M = M^T$. Nach einer *Singular Value Decomposition* kann die Matrix zu einer diagonalen Matrix D vereinfacht werden und als Gewichtungen der Terme des Punktprodukts von V und L dargestellt werden. Dadurch kann man Gleichung 80 in eine sehr einfache und bequem zu verwendende Form bringen:

$$f_r(L,V) = k_s [C_x L_x V_x + C_y L_y V_y + C_z L_z V_z]^n \tag{81}$$

Damit hat man nun einige Möglichkeiten die lobes zu formen, um verschiedene Effekte zu erreichen: Das originale cosine-lobe-Modell erhält man, indem man $-C_x = -C_y = C_z = \sqrt[n]{C_s}$ einsetzt.

Abbildung 18: Links drei Fotos, rechts eine ähnliche gerenderte Szene unter Verwendung eines klassischem cosine-lobe-Modelles. Die Intensität der Spiegelungen auf der Tischplatte nehmen in der Natur mit flacher werdendem Betrachtungswinkel zu, während sich dies beim gerendertem Bild genau umgekehrt verhält. [LFTG97]

Ein Nachteil des originalen cosine-lobe-Modelles ist, dass sich die Glanzlichtreflektion auf Oberflächen bei flachen Betrachtungswinkel nicht so verhält wie in der Natur. Hier nimmt die Reflektion nämlich ab, während sich dies in der Natur genau entgegengesetzt verhält, wie man in Abbildung 18 gut erken-

nen kann. Der Grund hierfür ist, mit abnehmendem Winkel mehr Licht von der Lackierung der Oberfläche reflektiert wird, und der diffuse Reflektionsanteil geringer wird. Mit dem generalisierten Modell ist es nun aber möglich, diese Verringerung des diffusen Anteils nachzubilden: Das Modell enthält nämlich das Lambert-Modell, welches sichtbarer wird, wenn man $n = 0$ setzt. Eine bei Rotation symmetrische diffuse Reflektion mit den gesuchten Eigenschaften kann nun einfach aus Gleichung 81 erhalten werden, indem man C_x und C_y gleich 0 setzt:

$$f_r(L, V) = k_d C_d [L_z V_z]^n \tag{82}$$

Hierbei ist $C_d = \frac{n+2}{2\pi}$ der Normalisierungfaktor, und k_d die maximale Albedo, die einen Wert zwischen 0 und 1 hat. Bei flachen Betrachtungswinkeln nimmt der diffuse Anteil der Reflektion proportional zu einer Potenz des Kosinus des Winkels zwischen Betrachter und Normale ab.

In Abbildung 18 nimmt aber nicht nur der diffuse Anteil ab, der Glanzlichtanteil nimmt zudem bei flacheren Reflektionswinkeln zu. Um dies nachzubilden, kann man das Modell mit einem Glanzlichtreflektionsterm erweitern. Dabei reflektiert man einfach einen Bruchteil der nicht vom direktional diffusen Lobus ausgesendet wird als Glanzlicht:

$$\begin{aligned} f_r(L, V) &= k_s C_s [L_m \cdot V]^n \\ &+ (k_s - k_s(L)) R_m \delta(L_m - V) \end{aligned} \tag{83}$$

Hierbei kann für $C_s = \frac{n+1}{2\pi}$ gewählt werden. R_m beschreibt den Bruchteil des Lichtes, der vom direktional diffusen Lobus verloren wird und in den Spiegelungsterm übergeht, und $\delta(L_m - V)$ ist eine Dirac-Delta-Funktion. Mit diesem Modell gerenderte Bilder sehen nun wesentlich realistischer aus, als mit dem klassischen cosine-lobe-Modell.

Andere bekannte Effekte wie zum Beispiel die sogenannte Retro-Reflektion können mit diesem Modell auch nachgebildet werden: Hierbei wird Licht nicht nur nach vorne reflektiert, sondern auch in die Richtung der Lichtquelle. Ein gutes Beispiel hierfür ist die Mondoberfläche, von der ein grosser Anteil des Lichts wieder zur Sonne zurück gesendet wird. Im Lafortune-Modell müssen lediglich alle drei Parameter C_x, C_y und C_z positiv sein, um diesen Effekt zu erreichen.

Wenn man eine anisotrope Oberfläche modellieren möchte, müssen die Parameter C_x und C_y verschiedene Werte haben. Genügt dies nicht, kann eine generellere Anisotropie erzeugt werden, indem man in Gleichung 80 für M eine nicht symmetrische Matrix einsetzt. Will man isotrope Reflektion beschreiben, setzt man einfach $C_x = C_y$.

Komplexe Reflektionseigenschaften von Materialien wie Aluminium können als eine Summe aus i Funktionen in der Form von Gleichung 81 beschrieben werden, mit für jede Funktion jeweils eigenen Parametern $C_{x,i}, C_{y,i}$ und $C_{z,i}$:

$$f_r(L, V) = \sum_i [C_{x,i} L_x V_x + C_{y,i} L_y V_y + C_{z,i} L_z V_z]^{n_i} \tag{84}$$

Mit dieser BRDF kann man nun besonders gut Oberflächen, die gerichtet diffuse Reflektionen haben, wie Metalle mit rauen Oberflächen oder angestrichene Oberflächen, modellieren. Auch helle, ausgeprägte Glanzlobes können leicht angenähert werden, während scharfe Metalloberflächen schwerer darzustellen sind, da kein Fresnel-Faktor oder Äquvalentes in den Gleichungen verwendet wird. Abbildung 19 zeigt verschiedene Reflektionseffekte, die man mit dem Lafortune-Modell darstellen kann.

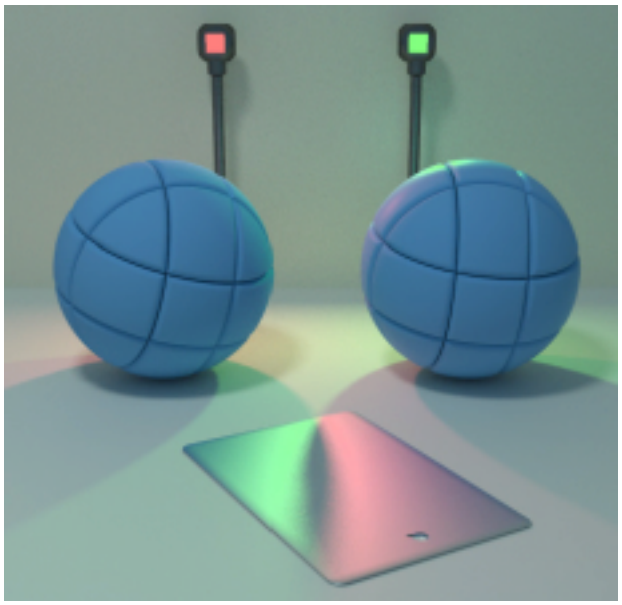

Abbildung 19: Eine mit drei Lichtern (rot, grün, weiss) beleuchtet Szene. Die linke Kugel wurde mit einer gewöhnlichen lambertischen Annäherung gerendert, die rechte mit der nicht linearen Approximation nach dem Lafortune Modell. Auf der rechten Kugel kann man rote und grüne Glanzreflektionen erkennen. Die Metallplatte hat eine sehr verwischte metallische Reflektion.

3 Fazit

In dieser Arbeit wurden eine kurze Einführung in bidirektionale Reflektionsverteilungsfunktionen und ein

kurzer Einblick in verschiedene Modelle gegeben, von denen die meisten sehr bekannt sind und auch in der Praxis häufig verwendet werden, und zum Teil aufeinander aufbauen: Lamberts Annahme (Abschnitt 2.1), dass die Reflektionsverteilungsfunktion einer diffusen Oberfläche einfach eine Konstante ist, ist genau wie das Phong-Modell (Abschnitt 2.2) eines der ersten generellen Shadingverfahren, die in der Computergrafik verwendet wurden. Lewis (Abschnitt 2.7) erweiterte das Phong-Modell und machte es physikalisch plausibler, Lafortune generalisierte wiederum Lewis' Modell. Cook und Torrance (Abschnitt 2.3) leiteten aus geometrisch-optischen Theorien ein physikalisch basiertes Modell ab, das He (Abschnitt 2.4) erweiterte und dabei physikalisch-optische Erkenntnisse miteinbezog. Auch Ward (Abschnitt 2.5) und Schlick (Abschnitt 2.6) basierten ihre Arbeit auf vorige wie die von Torrance und Cook, vereinfachten sie und zeigten, dass BRDFs nicht unbedingt rechenintensiv sein müssen.

Außer den wenigen hier vorgestellten BRDF Modellen gibt es noch viele andere, die die verschiedensten Eigenschaften haben und neue Möglichkeiten eröffnen. Unter anderem mit Hilfe dieser Modelle können Computer heute so realistische Bilder berechnen, dass sie sich nicht wesentlich von der Realität unterscheiden, und man sich manchmal dabei schwer tut, zu entscheiden, ob es sich bei einem Bild nun um ein Foto oder eine gerenderte Szene handelt. Allerdings fordert dieser hohe Realismus seinen Preis: Sehr realistische, dafür auch komplexe Modelle wie zum Beispeil das He-Modell als Extrembeispiel, benötigen sehr viel Rechenzeit und können derzeit noch nicht in Echtzeit berechnet werden. Neue Technologien wie zum Beispiel die vor wenigen Jahren in Mode gekommenen durch Vertex- und Pixelshader programmierbaren Grafikkarten lassen dieses Ziel näher rücken.

Literatur

[Bli77] James F. Blinn. Models of Light Reflection for Computer Synthesized Pictures. *Computer Graphics, Vol. 11, No.2*, 1977.

[Cal] Katherine Calkins. Thesis presentation: An Empirical Model of Thin Film Interference Effects in Computer Graphics. Slides von `http://www-viz.tamu.edu/showcase/thswkimg/k_calkins/presentation/4_prev%ious/previous01.html`.

[CT81] Robert L. Cook and Kenneth E. Torrance. A reflectance model for computer graphics. Technical report, Computer Graphics, vol. 15, no. 3, ACM., 1981.

[Hab01] Dr. Jörg Haber. Rendering bei Gesichtsanimation. Downloadbare Slides von `http://www.mpi-sb.mpg.de/~haberj/teaching/FAM-01/script/`, 2001.

[HB97] Donald Hearn and M. Pauline Baker. *Computer Graphics, C version.* Prentice Hall, Inc., New Jersey, 1997.

[HTSG91] Xiao D. He, Kenneth E. Torrance, Frangois X. Sillion, and Donald P. Greenberg. A Comprehensive Physical Model for Light Reflection. Technical report, Cornell University, 1991.

[Jar03] Rafal Jaroszkiewicz. Fast Extraction of BRDFs and Material Maps from Images. Master's thesis, University of Waterloo, 2003.

[Lew93] Robert R. Lewis. Making shaders more phsically plausible. Technical report, University of British Columbia, 1993.

[LFTG97] Eric P. F. Lafortune, Sing-Choong Foo, Kenneth E. Torrance, and Donald P. Greenberg. Non-Linear Approximation of Reflectance Functions. Technical report, Cornell University, 1997.

[May00] Heinz Mayer. From Surface Roughness to Surface Displacements. Technical report, Insitute of Computer Graphics and Vision, Graz univercity of Technology, 2000.

[Mei00] Gerhard Meister. Bidirektionale Reflektanz von staedtischen Oberflaechen. Technical report, Universitaet Hamburg, 2000.

[Mül97] Gordon Müller. Beschleunigung Strahlbasierter Rendering-Algorithmen. Master's thesis, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, 1997.

[MSKH00] Abbas Ali Mohamed, László Szirmay-Kalos, and Tamàs Horvàth. Hardware Implementation of Phong Shading using Spherical Interpolation. Technical report, Budapest University of Technology and Economics, Hungary, 2000.

[NIK89] Shree K. Nayar, Eatsushi Ikeuchi, and Takeo Kanade. Surface Reflection: Physical and Geometrical Perspectives. Technical report, The Robotics Institute, Carnegie Mellon University, 1989.

[NNSK99] László Neumann, Attila Neumann, and László Szirmay-Kalos. Compact Metallic Reflectance Models. Technical report, Technical University of Budapest, 1999.

[ON92] Michael Oren and Shree K. Nayar. Generalization of the Lambertian Model and Implications for Machine Vision. Technical report, Columbia University, 1992.

[Sch94] Christophe Schlick. An inexpensive BRDF model for physically based rendering. Technical report, 1994.

[SH97] Peter Shirley and Helen Hu. A Practitioners Assessment of Light Reflection Models. Technical report, University of Utah, Cornell University, 1997.

[SR85] Brian P. Sandford and David C. Robertson. Infrared Reflectance Properties of Aircraft Paints. *Proceedings IRIS Targets, Backgrounds and Discrimination*, 1985.

[TL94] Klaus D. Tönnies and Heinz U. Lemke. *3D-computergrafische Darstellungen*. Oldenburg Verlag GmbH, München, 1994.

[TS67] E. K. Torrance and E. M. Sparrow. Theory for off-specular reflection from roughened surfaces. *J. Opt. Soc. Am. 57*, 1967.

[War92] Gregory J. Ward. Measuring and modeling anisotropic reflection. *cg*, 26(2):265–272, 1992.

[Wat00] Alan Watt. *3D Computer Graphics*. Pearson Education Limited, Harlow, Essex CM20 2JE England, 2000.

[Wei02] Ulrich Weidenbacher. Beleuchtungsmodelle. Technical report, Universität Ulm, 2002.

[Wyn00] Chris Wynn. An Introduction to BRDF-Based Lighting. Technical report, NVIDIA Corporation, 2000.

[YDP] Hector Y. Yee, Philip Dutré, and Sumanta N. Pattanaik. Fundamentals of Lighting and Perception: The Rendering of Physically Accurate Images. In *Game Developer Conference 2002 Proceedings*.